Beiträge zur mathematischen Theorie der privaten und sozialen Krankenversicherung

Inaugural-Dissertation

der philosophischen Fakultät II der Universität Bern
zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

OSCAR WERNER SPRING
von Steffisburg, Bern

Von der philosophischen Fakultät II auf Antrag
des Herrn Prof. Friedli angenommen

Bern, den 22. Februar 1934 E. Hugi, Dekan

BUCHDRUCKEREI BERNER TAGBLATT - BERN - 1934

Beiträge zur mathematischen Theorie der privaten und sozialen Krankenversicherung

Inaugural-Dissertation

der philosophischen Fakultät II der Universität Bern
zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

OSCAR WERNER SPRING
von Steffisburg, Bern

Von der philosophischen Fakultät II auf Antrag
des Herrn Prof. Friedli angenommen

Bern, den 22. Februar 1934 E. Hugi, Dekan

BUCHDRUCKEREI BERNER TAGBLATT - BERN - 1934

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meinem lieben Bruder Arnold Spring gewidmet

Es ist mir ein Bedürfnis, an dieser Stelle den Herren Prof. Friedli, Prof. Moser, Prof. Crelier, Prof. Scherrer und Prof. Mauderli für die mir während meines Studiums erwiesene Unterstützung und Anregung meinen besten Dank auszusprechen.

Ganz besonders fühle ich mich Herrn Prof. Friedli und Herrn Dr. Zwinggi zu Dank verpflichtet. Durch ihre wertvolle Unterstützung und Anregung konnte die vorliegende Arbeit entstehen und durchgeführt werden.

Osc. W. Spring.

Einleitung.

Unter den Namen „Krankenversicherung" pflegt man all die Versicherungsformen zusammenzufassen, welche einem Versicherten im Krankheitsfalle auf irgend eine Art vor wirtschaftlichen Lasten Schutz bieten. Die verschiedenen Formen unterscheiden sich nach der Art der Leistungen, welche eine Krankenkasse ihren Versicherten ausrichtet. Die Kassenleistungen bestehen entweder aus einem Taggeld während der Dauer der Krankheit oder in der Uebernahme der Kosten für eine Heilbehandlung des Patienten (Arzt, Medikamente, Operationen, Krankenhaus- und Kuraufenthalte usw.). Neben diesen Hauptleistungen gewähren die Krankenkassen meistens auch noch Nebenleistungen in Form von Sterbegeld und Wöchnerinnenunterstützungen.

Nach der Art der Hauptleistungen können wir in der Krankenversicherung die beiden Hauptformen unterscheiden: Krankengeld-Versicherung und Heilkosten-Versicherung. In der Praxis treten aber in der Regel bestimmte Kombinationen zwischen diesen beiden Hauptformen auf, seltener trifft man die eine oder andere Form allein an.

Alle Kassenleistungen im Krankheitsfalle haben einen temporären Charakter, so dass also ein und dieselbe Person die Versicherung mehrmals in zeitlich voneinander getrennten Epochen in Anspruch nehmen kann. Durch diese Eigenschaft unterscheidet sich die Krankenversicherung stark von den meisten anderen Versicherungsarten, und das ist auch der Grund, weshalb ihre mathematische Theorie einen ganz eigenen Charakter aufweist.

Die Rechnungsmethoden der Krankenversicherung wurden in der Literatur schon des öftern behandelt. Wenn man aber in den bisherigen Veröffentlichungen Nachschau hält, so sieht man, dass die Mehrzahl der mathematischen und technischen Untersuchungen lediglich auf die eine Hauptform dieses vielgestaltigen Versicherungszweiges, auf die Krankengeldversicherung allein, zugespitzt sind. Dagegen hat in der Heilkostenversicherung die Förderung der mathematischen Theorie nicht Schritt zu halten vermocht mit der wirtschaftlichen Entwicklung. Die Gründe dazu mögen einmal darin zu suchen sein, dass sich die Heilkostenversicherung an den meisten Orten erst in den letzten Jahrzehnten zu entwickeln

begann, als die Krankenkassen ihre Leistungen den wirtschaftlichen Bedürfnissen der versicherungssuchenden Bevölkerung anpassen mussten, und dann auch in der Tatsache, dass es für eine gute Entwicklung der Krankenversicherung weniger auf die genauen versicherungstechnischen Berechnungen, als auf eine wohldurchdachte Geschäftspolitik der Krankenkassen ankommt.

Als die *klassische* Rechnungsmethode der Krankengeldversicherung kann die im Text-Book [1] behandelte bezeichnet werden. Sie verwendet als Grundlage die Krankheitsordnung, welche angibt, wieviele Tage oder Wochen eine Person bestimmten Alters im Laufe eines Jahres durchschnittlich krank ist. Eine umfassende monographische Darstellung dieser Methode ist erstmals im Jahre 1912 von Dr. H. Renfer [2] veröffentlicht worden. Einige Jahre später erschien eine sehr schöne Arbeit von Dr. H. Grieshaber [3], in welcher das gesamte Problem von der theoretischen Seite eingehend behandelt wird.

Die unentbehrlichen Grundlagen für die mathematische Behandlung der Krankenversicherung bilden statistische Erhebungen über die Sterblichkeits- und Kränklichkeitsverhältnisse in einer gegen Krankheit versicherten Personengesamtheit. Zur Beurteilung der Krankheitsverhältnisse findet man in der Regel in einer Krankheitsstatistik für jedes Alter oder für Altersgruppen die folgenden Grundziffern angegeben:

M = die Zahl der ein volles Jahr unter Beobachtung gestandenen Mitglieder,

K = die Anzahl der im Laufe des Beobachtungsjahres erkrankten Personen,

F = die Anzahl der Krankheitsfälle,

${}^{(t)}K$ = die Anzahl der entschädigten Krankentage.*)

Hieraus lassen sich die folgenden Verhältniszahlen als Masse für die Kränklichkeit bestimmen:

$\frac{K}{M}$ = die Erkrankungsziffer,

$\frac{F}{M}$ = die durchschnittliche Erkrankungshäufigkeit,

$\frac{{}^{(t)}K}{M}$ = die durchschnittliche Kränklichkeit,

Anmerkung: Die Zahlen in eckiger Klammer [ ] sind die Hinweise auf das Literaturverzeichnis im Anhang.

*) Was wir mit ${}^{(t)}K$ bezeichnen wollen, bezeichnet man oft auch mit Kt; so z. B. Bleicher und Grieshaber.

$\frac{F}{K}$ = die relative Erkrankungshäufigkeit,

$\frac{{}^{(t)}K}{K}$ = die relative Kränklichkeit,

$\frac{{}^{(t)}K}{F}$ = die durchschnittliche Krankheitsdauer.

Die an dritter Stelle genannte dieser Verhältniszahlen, also die durchschnittliche Kränklichkeit, ist für den Aufbau der Theorie der Krankengeld-Versicherung von grundlegender Bedeutung. Betrachtet man sie als Funktion des Alters, so stellt sie uns die schon eingangs erwähnte *Krankheitsordnung k (x)* dar.

Mit Hilfe einer passenden Krankheitsordnung und einer geeigneten Sterbetafel lassen sich unter Anwendung der reich ausgebildeten Technik der Lebensversicherung bereits eine ganze Anzahl von Problemen der Krankenversicherung mit hinreichender Genauigkeit lösen. So lässt sich beispielsweise die Einmaleinlage für eine lebenslängliche Krankengeld-Versicherung auf das Taggeld von 1 Franken nach der Formel berechnen:

$$\bar{Z}(x) = \frac{1}{l(x)} \int_0^\infty v^t \, l\,(x+t)\, k\,(x+t)\, dt$$

Bezeichnet man die kontinuierliche lebenslängliche Leibrente mit

$$\bar{a}\,(x) = \frac{1}{l(x)} \int_0^\infty v^t \, l\,(x+t)\, dt$$

so ergibt sich für die kontinuierliche Jahresprämie derselben Versicherung

$$\bar{P}\,(x) = \frac{\int_0^\infty v^t \, l\,(x+t)\, k\,(x+t)\, dt}{\int_0^\infty v^t \, l\,(x+t)\, dt}$$

und die prospektive, bzw. retrospektive Berechnung des Deckungskapitals geschieht nach den Formeln

$${}_t\bar{V}_x = \frac{1}{v^t \, l\,(x+t)} \int_t^\infty v^\vartheta \, l\,(x+\vartheta)\,\{k\,(x+\vartheta) - P\,(x)\}\, d\vartheta$$

bzw.

$$ {}_t\bar{V}_x = \frac{1}{v^t\, l(x+t)} \int_0^t v^\vartheta\, l(x+\vartheta)\, \{P(x) - k(x+\vartheta)\}\, d\vartheta $$

Jede Krankenkasse arbeitet nach einem ihr eigenen Versicherungsplan, der im wesentlichen charakterisiert wird durch die Festsetzungen über die Karenz und die maximalen Versicherungsleistungen, in der Krankengeld-Versicherung also über die Karenzzeit und die maximale Dauer der Taggeldzahlungen an ein und dieselbe Person. Es ist nun klar, dass es bei der Aufnahme einer Krankheitsstatistik an Hand der Bücher einer bestimmten Krankenkasse von Bedeutung ist, zu wissen, nach welchen Grundsätzen die Kasse arbeitet. Denn die ausgezählten, beobachteten Krankentage ${}^{(t)}K$ hangen natürlich wesentlich von derartigen Bestimmungen über die Leistungsdauer ab, und die aus diesem Material abgeleitete Krankheitsordnung ist daher nur für solche Kassen als Rechnungsgrundlage geeignet, welche nach den gleichen Grundsätzen arbeiten. Dieser Fall tritt aber nur ausnahmsweise ein. Um daher eine Krankheitsordnung für mehrere Versicherungspläne verwendbar zu machen, behilft man sich mittels des *Reduktionsfaktors**) $R_x(\tau)$. Entspricht $k(x)$ einer unbeschränkten Leistungsdauer, so stellt $k(x) \cdot R_x(\tau)$ die durchschnittliche Zahl der Krankentage dar, wenn das Taggeld längstens während τ Tagen ausbezahlt wird.

Für die verschiedenen Formen der Heilkosten-Versicherung ist die skizzierte Rechnungsmethode ebenfalls anwendbar, wenn an Stelle der Krankheitsordnung der für eine Person bestimmten Alters im Laufe des Beobachtungsjahres durchschnittlich aufgewendete Betrag an Versicherungsleistungen in die Rechnung eingeführt wird. Da aber der statistischen Ermittlung von Masszahlen für die Leistungen in Krankheitsfällen meistens noch enge Grenzen gesetzt sind wegen der Kleinheit des vorhandenen Beobachtungsmaterials, wird in der Heilkosten-Versicherung vielfach noch mit einfachen, für den ganzen Versicherungsbestand geltenden Durchschnittswerten gerechnet.

---

*) In der Krankenversicherung eingeführt durch *Prof. Dr. Hermann Kinkelin* [4]; über die Berechnung des Reduktionsfaktors vergl. ebenfalls die Denkschrift von *Prof. Dr. Chr. Moser* [5].

Die bis dahin geschilderte Behandlungsweise der Krankenversicherung ist die einfachste und sie erlaubt bereits, die wichtigsten Probleme mit einer für die Praxis genügenden Genauigkeit zu lösen. Indessen ist ihr eine gewisse Starrheit nicht abzusprechen, welche den Einblick in den organischen Verlauf der Schadenfälle verschliesst und daher die logische Zergliederung einer grossen Anzahl von Spezialproblemen verunmöglicht. Will man das Wesen der Krankenversicherung theoretisch gründlicher durchdringen, so tut man besser, den Gegenstand von einem anderen Gesichtspunkte aus zu betrachten.

In gewisser Hinsicht ist die Krankenversicherung eng verwandt mit der eigentlichen Invaliditätsversicherung. Es scheint deshalb geradezu gegeben, die Methoden dieses reich ausgebildeten Versicherungszweiges in mehr oder weniger modifizierter Form auch auf die Krankenversicherung anzuwenden. Es sind in dieser Hinsicht bereits von verschiedenen Seiten Anregungen gemacht worden. So haben denn anlässlich des IX. internationalen Aktuarkongresses in Stockholm, wo die Technik der Krankenversicherung ebenfalls Gegenstand der Verhandlungen war, auch eine ganze Anzahl von Autoren wertvolle Arbeiten über diese Frage vorgelegt. Es seien in diesem Zusammenhange speziell die Abhandlungen von *P. E. Böhmer* [6], *H. Wagner* [7] und *P. Mattsson* [8] erwähnt, welche alle diesen neuen Standpunkt befürworten.

In neuester Zeit hat die „Kommission zur Revision der schwedischen Pensionsversicherung" im II. Teil ihres Berichtes [9] eine Untersuchung veröffentlicht über eine Aenderung der schwedischen Sozialversicherung in der Hinsicht, dass die Invalidenversicherung mit der Krankenversicherung vereinigt wird zu einer einheitlichen Versicherung gegen Arbeitsunfähigkeit. Dieser Vorschlag verlangt naturgemäss ebenfalls eine Behandlung der Krankenversicherung nach den genannten neuen Gesichtspunkten.

Die vorliegende Arbeit stellt nun einen weiteren Beitrag dar zu dieser neuen Betrachtungsweise der Krankenversicherung, nach welcher der ganze Bestand der Versicherten getrennt wird in einen Bestand der Gesunden und einen solchen der Kranken und wo die Rechnungsmethoden der Invalidenversicherung in etwas abgeänderter Form verwendet werden können.

Die Problemstellung.

Wir bezwecken den Aufbau der Krankenversicherung aus dem Intensitätsbegriffe. Die Intensitäten stellen in der Versicherungsmathematik die empfindlichsten Masszahlen dar und eignen sich wohl am besten für die direkte Beschreibung von Vorgängen in einer Personengesamtheit. Wir definieren daher in einem ersten Kapitel als grundlegende Masszahlen die Intensitäten der Sterblichkeit für Gesunde und Kranke, die Intensität der Erkrankung und die Intensität der Genesung, leiten Methoden ab zu ihrer numerischen Berechnung und zeigen, wie sich die Ordnungen der Gesunden und der Kranken aus ihnen berechnen lassen. Ein weiteres Kapitel behandelt sodann die Kassenleistungen, die Gesundenrente, das Deckungskapital, die Anwartschaft und die Prämie in der privaten Krankenversicherung. Im letzten Kapitel endlich wird die Theorie der durchschnittlichen Deckungskapitalien, Anwartschaften, Rentenbarwerte und Prämien in der sozialen Krankenversicherung entwickelt, und zwar sowohl für geschlossene, als auch für offene Gesamtheiten.

Es sei noch bemerkt, dass zur Erzielung einer methodischen Geschlossenheit durchwegs die sogenannte „kontinuierliche Behandlungsweise" der Probleme durchgeführt wurde.

Kapitel I.

Die versicherungstechnischen Grundgrössen.

§ 1. Allgemeines über die Vorgänge in einer gegen Krankheit versicherten Personengesamtheit.

Es interessiert uns in erster Linie, zu wissen, wie ein Stamm von gesunden (aktiven) Personen durch Sterbefälle und Krankheiten im Laufe der Zeit verändert wird. Dabei soll die Einwirkung anderer Aenderungsursachen als Tod und Krankheit (z. B. Ein- und Auswanderung) ausgeschaltet sein. Wir betrachten also eine *geschlossene* Gesamtheit von gesunden Personen, die alle lediglich dem Risiko des Sterbens oder Erkrankens ausgesetzt sind.

Der anfängliche Bestand umfasse $B(o)$ gesunde Personen. Tod und Krankheit sind nun die beiden Ursachen, welche zur Folge haben, dass sich diese Zahl nach und nach verringert, d. h. sie bewirken die *Entaktivierung* der Gesunden, so dass der Bestand nach t Jahren nur noch $B(t)$ Personen beträgt. Von den entaktivierten Personen fallen die Gestorbenen für uns künftig ausser Betracht; sie sind endgültig aus der betrachteten Gesamtheit ausgeschieden. Dagegen lenkt sich unser Interesse in vermehrtem Masse auf die Erkrankten. Diese bilden mit der Zeit eine neue Personengesamtheit, die zuerst, bei Null anfangend, beständig zunimmt. Aber schon nach kurzer Zeit wird das Anwachsen mehr und mehr gedämpft und schliesslich sogar verhindert, da auch bei den Kranken fortwährend Personen ausscheiden, entweder infolge Genesung oder durch Tod, wobei sogar angenommen werden muss, dass die Sterblichkeit bei den Kranken grösser sei, als bei den Gesunden, da dem Tode doch vielfach Krankheit vorangeht.

Wir nehmen wiederum an, Tod und Genesung seien die beiden einzigen Ausscheideursachen, welche die *Entkrankung* zur Folge haben. Es fallen auch hier die Gestorbenen für uns künftig ausser Betracht. Die Genesenen aber werden wieder in den Bestand der Gesunden zurückkehren und in gleichem Masse wie früher dem Risiko des Sterbens oder Erkrankens erneut ausgesetzt sein. Das bedeutet, dass sie als wiederum *vollkommen* gesund und *vollwertig* aktiv betrachtet werden. Die Genesung kommt demnach einer vollständigen *Reaktivierung* gleich.

Zusammenfassend stellen wir also fest, dass die Gesamtheit der Versicherten $B(t)$ zu jedem Zeitpunkte t in zwei Teilgesamtheiten zerfällt, nämlich in die Gesamtheit der Gesunden $B^g(t)$ und in die Gesamtheit der Kranken $B^k(t)$. Auf beide Teile wirkt die Sterblichkeit als vermindernde Ursache, durch die Vorgänge des Erkrankens und Genesens stehen sie in einer ununterbrochenen Wechselbeziehung.

Formelmässig lässt sich das eben Gesagte folgendermassen ausdrücken: In jedem Zeitpunkte ist

$$B(t) = B^g(t) + B^k(t) \tag{1}$$

Zu Beginn der Beobachtung sind noch keine Kranken vorhanden und wir haben daher für $t = o$

$$\begin{aligned} B^g(o) &= B(o) \\ B^k(o) &= o \end{aligned} \tag{1a}$$

Wird mit $t = \infty$ der Zeitpunkt bezeichnet, wo die ganze Gesamtheit ausgestorben ist, so gilt ferner

$$B(\infty) = B^g(\infty) = B^k(\infty) = o \tag{1b}$$

Nun lehrt uns die Erfahrung, dass die Sterblichkeits-, Erkrankungs- und Genesungsverhältnisse in einer Personengesamtheit durch eine ganze Reihe von Faktoren bedingt sind. Einmal spielen, wie zahlreiche statistische Untersuchungen zeigen, Geschlecht, Beruf, Lebensweise, Wohnverhältnisse und Klima eine entscheidende Rolle, dann aber namentlich das Alter, ferner für die Entaktivierung bis zu einem gewissen Grade die abgelaufene Versicherungsdauer und für die Entkrankung die abgelaufene Krankheitsdauer. Mehr äussere Umstände, die die Vorgänge ebenfalls beeinflussen, liegen ferner begründet in der Geschäftspraxis der Krankenkassen (Art der Kasse, Form der Versicherungsleistungen, Krankenkontrolle, Umschreibung des Begriffes „Krankheit" usw.).

In einer mathematischen Untersuchung können wir all diesen Faktoren nur dadurch Rechnung tragen, dass wir uns auf eine einzige Gefahrenklasse beschränken. Wir treffen somit die vereinfachende Annahme, dass die Personen der betrachteten Gesamtheit alle gleichen Geschlechtes sind und unter vollständig gleichen Lebensbedingungen den gleichen Beruf ausüben, und dass sie ferner alle

zur selben Zeit, im Alter von x Jahren, in dieselbe Krankenkasse eingetreten seien. Den anfänglichen Bestand einer derartigen Gesamtheit bezeichnen wir zum Unterschiede gegen früher mit $l(x)$. Nach der Zeit t leben dann noch $l(x+t)$ Personen, wovon $l^{gg}(x+t)$ gesund und $l^{kk}(x+t)$ krank sind. Die zu (1) analogen Beziehungen sind nun:

$$l(x+t) = l^{gg}(x+t) + l^{kk}(x+t)$$

$$l^{kk}(x) = o \qquad l^{gg}(x) = l(x) \qquad (2)$$

$$l(\infty) = l^{gg}(\infty) = l^{kk}(\infty) = o$$

Wie leicht einzusehen ist, bedeuten $l^{gg}(x+t)$ und $l^{kk}(x+t)$ in der Krankenversicherung das analoge, was die bekannten *Schärtlin*'schen Ordnungen [10] $l^{aa}(x+t)$ und $l^{ii}(x)+t$ in der Invaliditätsversicherung. Wir sprechen daher, in Anlehnung an die dortige Benennungsweise, in Zukunft von einer *Ordnung der Gesunden* $l^{gg}(x+t)$ und einer *Ordnung der Kranken* $l^{kk}(x+t)$, während $l(x+t)$ als die *Gesamtüberlebensordnung* bezeichnet werden soll.

Nach den bisherigen Darlegungen können die drei Ordnungen $l(x+t)$, $l^{gg}(x+t)$ und $l^{kk}(x+t)$ als Funktionen von x und t betrachtet werden. Es liegt in der Natur der Sache, dass diese Funktionen vollständig im Endlichen verlaufen, da alle Aenderungen ebenfalls *endlich* sind. Nun nehmen wir nebst dem noch an, dass sie zeitlich *stetig* verlaufen und dass sie *differenzierbar* seien. Wir betrachten demnach einen mathematischen Idealfall und stellen uns damit auf den Boden der „kontinuierlichen Methode".

§ 2. Die elementaren Masszahlen.

Für die kontinuierliche Betrachtungsweise von Versicherungsproblemen eignen sich am besten die *Intensitäten* als Elementargrössen. Es sind dies Masszahlen, welche die Aenderungen in unendlich kleinen Zeitintervallen direkt erfassen, die eine Funktion aus irgend welchen Ursachen erfährt.

Die Intensität der Abnahme einer (stetigen und differenzierbaren) Funktion $f(x)$ ist definiert durch den Ausdruck:

$$\mu(x) = \lim_{\Delta x \to dx} \frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

Geht man zur Grenze über, so ergeben sich die Beziehungen:

$$\mu(x) = -\frac{d f(x)}{f(x) \cdot dx} = -\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{d}{dx} Log\, f(x) \qquad (3)$$

Hieraus folgt umgekehrt, bei gegebenem $\mu(s)$, ein Ausdruck für die Aenderung der ursprünglichen Funktion $f(s)$ im Zeitintervall s bis $s + ds$, nämlich

$$d f(s) = -f(s) \cdot \mu(s) \cdot ds \qquad (4)$$

und durch Integration dieser Differentialgleichung entsteht

$$f(x) = f(a) \cdot e^{-\int_a^x \mu(s) \cdot ds} \qquad (5)$$

wo $f(a)$ einen Ausgangswert bezeichnet.

Wirken n verschiedene, einander ausschliessende Ausscheideursachen gleichzeitig auf die totale Aenderung der Funktion, und bezeichnet man mit

$$\mu_i(x) = -\frac{d f_i(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{dx} \qquad (6)$$

die Einzelintensität der i-ten Ursache, so ist die totale Ausscheideintensität gleich der Summe

$$\mu(x) = \mu_1(x) + \mu_2(x) + \cdots + \mu_n(x) \qquad (7)$$

Die totale Ausscheideintensität setzt sich also aus den Einzelintensitäten additiv zusammen.

Nun haben wir im vorigen Paragraphen festgestellt, dass die Veränderungen in einer gegen Krankheit versicherten Per-

sonengesamtheit im wesentlichen auf die folgenden vier Ursachen zurückzuführen sind:

1. Sterblichkeit der Gesunden } Entaktivierung
2. Erkrankung }
3. Sterblichkeit der Kranken } Entkrankung
4. Genesung (Reaktivierung) }

Für jede dieser Ausscheideursachen definieren wir jetzt eine Einzelintensität als elementare Masszahl, mit den Voraussetzungen, dass

a) die Entaktivierung durchschnittlich nur vom erreichten Alter abhängig sei, *nicht* auch von der abgelaufenen Versicherungsdauer,

b) die Entkrankung sowohl vom erreichten Alter zur Zeit der Erkrankung, als auch von der verflossenen Krankheitsdauer abhänge und

c) dass frühere Krankheitsfälle ein und derselben Person weder auf die Entaktivierungs- noch auf die Entkrankungsmasszahlen einen Einfluss ausüben.

Die letzte Annahme sagt insbesondere, dass ein- oder mehrmals reaktivierte Personen genau den gleichen Sterblichkeits- und Erkrankungskräften unterliegen, wie wenn sie noch nie krank gewesen wären. Diese Festsetzung lässt sich dadurch rechtfertigen, dass es in der Praxis nicht möglich ist, in einer versicherten Gesamtheit eine diesbezügliche Differenzierung durchzuführen, denn schon unter den bei Vertragsbeginn als gesund aufgenommenen Personen wird sich kaum jemals eine finden, die noch nie krank war.

Es bedeute nun:

$\mu^g(s)$ ... Die Intensität der Sterblichkeit eines s-jährigen gesunden Mitgliedes,

$\varepsilon^g(s)$ ... Die Intensität der Erkrankung eines s-jährigen gesunden Mitgliedes.

Dann ist für die totale Entaktivierungsintensität eines solchen Mitgliedes zu setzen:

$$\nu^g(s) = \mu^g(s) + \varepsilon^g(s) \tag{8}$$

Analog sei:

$\mu^k(s, \xi)$ ... Die Intensität der Sterblichkeit für ein im Alter s erkranktes, nach der Zeit ξ immer noch krankes Mitglied,

$\gamma^k(s, \xi)$ ... Die Intensität der Genesung für ein ebensolches Mitglied.

Für die totale Entkrankungsintensität hat man dann wiederum zu setzen:

$$\sigma^k(s, \xi) = \mu^k(s, \xi) + \gamma^k(s, \xi) \tag{9}$$

Es ist nun noch zu bemerken, dass wir als Zeiteinheit für das Alter s stets das Jahr, für die Krankheitsdauer ξ dagegen den J-ten Teil des Jahres, beispielsweise den Tag, wählen. Die Ausscheideintensitäten der Gesunden werden also auf 1 Jahr, diejenigen der Kranken auf $1/J$ Jahr (1 Tag) bezogen. Im folgenden nehmen wir für J, wenn nichts weiter bemerkt ist, immer 365,2422 an, legen also unseren Rechnungen das tropische Jahr mit 365,2422 mittleren Sonnentagen zugrunde.

§ 3. Die Entkrankungsordnung.

Es soll die Anzahl der im Alter s (d. h. $(s - x)$ Jahre nach Vertragsbeginn, wenn x das Eintrittsalter ist) frisch erkrankten Personen mit $l^k(s, o)$ bezeichnet werden. Davon sind nach einer Krankheitsdauer von ξ Tagen $l^k(s, \xi)$ Personen immer noch krank. Diese Anzahl ändert sich im Zeitmomente ξ bis $(\xi + d\xi)$ um den Betrag

$$\begin{aligned} d\, l^k(s, \xi) &= -\, l^k(s, \xi) \cdot [\mu^k(s, \xi) + \gamma^k(s, \xi)] \cdot d\xi \\ &= -\, l^k(s, \xi) \cdot \sigma^k(s, \xi) \cdot d\xi \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich mittels logarithmischer Integration zwischen o und τ Tagen

$$l^k(s, \tau) = l^k(s, o) \cdot e^{-\int_o^\tau \sigma^k(s, \xi) \cdot d\xi} \tag{10}$$

Dies ist nun der mathematische Ausdruck für die *Entkrankungsordnung* der im Alter s erkrankten Personen. Sie ist also bestimmt durch einen Anfangswert $l^k(s, o)$ und die Entkrankungsintensität $\sigma^k(s, \xi)$. Wenn letztere bekannt ist, so lässt sich die Entkrankungsordnung verhältnismässig leicht berechnen. Wenn insbesondere

die Entkrankungsintensität durch einen analytischen Ausdruck dargestellt werden kann, so ist das für die Entkrankungsordnung ebenfalls möglich.*)

Wir können der Formel (10) eine etwas andere Bedeutung geben, wenn wir sie in der Form schreiben:

$$p^k(s,\ \tau) = \frac{l^k(s,\ \tau)}{l^k(s,\ o)} = e^{-\int_o^\tau \sigma^k(s,\ \xi)\ .\ d\,\xi} \qquad (11)$$

Es bedeutet dann: $p^k(s,\ \tau)$ = die Wahrscheinlichkeit, dass eine im Alter s erkrankte Person nach τ Tagen *immer noch* krank ist, ohne inzwischen einmal genesen zu sein.

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit für die gleiche Person, nach τ Tagen entkrankt zu sein, ist dann

$$q^k(s,\ \tau) = 1 - p^k(s,\ \tau)$$

Für $\tau = o$ und $\tau = \infty$ nehmen die beiden Wahrscheinlichkeiten die Werte an:

$$p^k(s, o) = 1\ ;\ q^k(s, o) = o$$

$$p^k(s, \infty) = o\ ;\ q^k(s, \infty) = 1$$

Die Entkrankungsordnung ist eine sogenannte *zusammengesetzte* Ordnung [12], da zwei Ausscheideursachen die Abnahme bedingen. Denken wir uns nun eine der Ausscheideursachen unter-

---

*) *Anmerkung:* Einen verheissungsvollen Ansatz in dieser Hinsicht bedeutet beispielsweise das sogenannte „Moser'sche Gesetz". Es fusst auf der Annahme:

$$\sigma^k(s,\ \xi) = \frac{a}{(c+\xi)^2} + b$$

Durch Einsetzen in obigem Ausdruck ergibt sich

$$l^k(s,\ \tau) = l^k(s,\ o) \cdot e^{\frac{a}{c}} \cdot e^{b\tau} \cdot e^{-\frac{a}{c+\tau}} = k \cdot s^\tau \cdot g^{\frac{1}{c+\tau}}$$

Darin bedeuten k, s, g und c Materialkonstanten. Vergleiche diesbezüglich das Protokoll des III. internationalen Aktuarenkongresses, ferner die Dissertation von *Dr. W. Thalmann* [11].

bunden, so erhalten wir die eine oder die andere der folgenden zwei Abfallsordnungen

$$l^{k_1}(s, \tau) = l^k(s, o) \cdot e^{-\int_o^\tau \mu^k(s, \xi) \cdot d\xi}$$

$$l^{k_2}(s, \tau) = l^k(s, o) \cdot e^{-\int_o^\tau \gamma^k(s, \xi) \cdot d\xi}$$

Dabei ist die erste die *Absterbeordnung* und die zweite die *Genesungsordnung* der im Alter s erkrankten Personen. Es ist leicht ersichtlich, dass zwischen diesen und der Erkrankungsordnung die einfache Beziehung besteht:

$$l^k(s, \tau) = \frac{1}{l^k(s, o)} \cdot l^{k_1}(s, \tau) \cdot l^{k_2}(s, \tau) \qquad (12)$$

Wenn wir links und rechts noch mit $l^k(s, o)$ dividieren und die folgenden Bezeichnungen verwenden:

$$p^{k_1}(s, \tau) = \frac{l^{k_1}(s, \tau)}{l^k(s, o)} \quad \text{und} \quad p^{k_2}(s, \tau) = \frac{l^{k_2}(s, \tau)}{l^k(s, o)}$$

so geht die Beziehung (12) über in die nachstehende:

$$p^k(s, \tau) = p^{k_1}(s, \tau) \cdot p^{k_2}(s, \tau) \qquad (13)$$

Sinngemäss bedeuten $p^{k_1}(s, \tau)$ und $p^{k_2}(s, \tau)$ die *Verbleibswahrscheinlichkeiten* für die unabhängigen Ordnungen $l^{k_1}(s, \tau)$ und $l^{k_2}(s, \tau)$, genau in analoger Weise, wie $p^k(s, \tau)$ die Verbleibswahrscheinlichkeit der Erkrankungsordnung darstellt.

Eine derartige Zerlegung einer zusammengesetzten Ordnung in zwei unabhängige Faktoren ist in manchen Fällen vorteilhaft. Kennt man nämlich in der Beziehung (13) zwei Wahrscheinlichkeiten, so kann man mit ihrer Hilfe die dritte berechnen.

§ 4. Die Berechnung der Ordnungen $l^{gg}(x+t)$ und $l^{kk}(x+t)$ aus den Intensitäten.

Nachdem die elementaren Grundgrössen $\mu^g(x+t)$, $\varepsilon^g(x+t)$, $\mu^k(s,\xi)$ und $\gamma^k(s,\xi)$ eingeführt worden sind, soll nun ihr Zusammenwirken mathematisch beschrieben werden. Wir halten uns dabei für die mathematischen Ableitungen an die Methode, welche *Schoenbaum* [13] [14] in anderem Zusammenhange entwickelt hat.

Der Bestand der Gesunden $l^{gg}(x+\tau)$ im Zeitpunkte $(x+\tau)$ vermindert sich in dem unendlich kleinen Zeitintervall $(x+\tau)$ bis $(x+\tau+d\tau)$ um den Betrag

$$-l^{gg}(x+\tau)\cdot\left[\mu^g(x+\tau)+\varepsilon^g(x+\tau)\right]\cdot d\tau$$

oder

$$-l^{gg}(x+\tau)\cdot\nu^g(x+\tau)\cdot d\tau$$

Nun ist das Ausscheiden infolge Krankheit ja kein endgültiges, sondern die Genesenen sollen jeweilen wiederum in den Bestand der Gesunden aufgenommen werden. In jedem Zeitmomente vermehrt sich daher dieser Bestand um eine gewisse Anzahl von Reaktivierten, welche vorderhand durch die noch zu bestimmende Funktion

$$G(x+\tau)\cdot d\tau$$

gegeben sei. Demnach beträgt die gesamte Aenderung des Bestandes im betrachteten Intervall

$$d\,l^{gg}(x+\tau)=-l^{gg}(x+\tau)\cdot\nu^g(x+\tau)\cdot d\tau+G(x+\tau)\cdot d\tau \qquad (14)$$

$G(x+\tau)$ nennen wir die Gesundungs- oder Reaktivierungsfunktion. Zu ihrer Bestimmung schalten wir die folgende Zwischenuntersuchung ein:

Im Zeitpunkte s waren $l^{gg}(s)$ gesunde Personen vorhanden, von denen im Momente s bis $(s+ds)$

$$l^{gg}(s)\cdot\varepsilon^g(s)\cdot ds$$

erkrankten. Hiervon erreichen

$$l^{gg}(s) \cdot \varepsilon^{g}(s) \cdot p^{k}(s, J \cdot \{x + \tau - s\}) \cdot ds\,;\ (J = 365{,}2422!)$$

im kranken Zustande das Alter $(x + \tau)$. Im nächsten Momente $(x + \tau)$ bis $(x + \tau + d\tau)$ genesen

$$l^{gg}(s) \cdot \varepsilon^{g}(s) \cdot p^{k}(s, J \cdot \{x + \tau - s\}) \cdot \gamma^{k}(s, J \cdot \{x + \tau - s\}) \cdot ds$$

und treten also wieder in den Bestand der Gesunden zurück. Damit wir nun alle in der Zeit x bis $(x + \tau)$ aufgetretenen Erkrankungs- und Genesungsfälle erfassen, müssen wir über s integrieren zwischen den Grenzen $s = x$ und $s = (x + \tau)$. Was wir erhalten, ist die gesuchte Gesundungsfunktion

$$G(x + \tau) = \int_{x}^{x + \tau} l^{gg}(s) \cdot \varepsilon^{g}(s) \cdot p^{k}(s, J \cdot \{x + \tau - s\}) \cdot \gamma^{k}(s, J \cdot \{x + \tau - s\}) \cdot ds$$

Jetzt greifen wir zurück auf die Gleichung (14). Diese nimmt nunmehr die folgende Form an:

$$dl^{gg}(x + \tau) = -\left[l^{gg}(x + \tau) \cdot \nu^{g}(x + \tau) - \int_{x}^{x+\tau} l^{gg}(s) \cdot \varepsilon^{g}(s) \cdot p^{k}(s, J\{x + \tau - s\}) \cdot \gamma^{k}(s, J\{x + \tau - s\}) \right] d\tau \qquad (14\,*)$$

Der vorliegende Ausdruck ist eine *Integrodifferentialgleichung I. Ordnung*, welche sich auf einfache Weise noch umformen lässt. Wir integrieren zu diesem Zwecke einmal beidseitig über $(x + \tau)$. Das Eintrittsalter x tritt dabei als untere, ein beliebiges Alter $y = x + t$ als obere Integrationsgrenze auf. Setzen wir der Einfachheit halber noch

$$z = x + \tau$$

so ergibt sich

$$l^{gg}(y) - l^{gg}(x) = -\int_{x}^{y} l^{gg}(z) \cdot \nu^{g}(z) \cdot dz + \int_{x}^{y} dz \int_{x}^{z} l^{gg}(s) \cdot \varepsilon^{g}(s) \cdot p^{k}(s, J \cdot \{z - s\}) \cdot \gamma^{k}(s, J \cdot \{z - s\}) \cdot ds$$

Zur weiteren Vereinfachung dieses Ausdruckes benötigen wir den Satz über Doppelintegrale von *Dirichlet* [15], nach welchem man setzen darf

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) \cdot dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) \cdot dx$$

Auf unseren Fall angewendet ergibt das

$$l^{gg}(y) - l^{gg}(x) = \int_x^y l^{gg}(s) \cdot$$

$$\left| -v^g(s) + \int_s^y \varepsilon^g(s) \cdot p^k(s, J \cdot \{z - s\}) \cdot \gamma^k(s, J \cdot \{z - s\}) \cdot dz \right| \cdot ds$$

Nun setzen wir zur Abkürzung noch

$$K(s, y) = -v^g(s) + \int_s^y \varepsilon^g(s) \cdot p^k(s, J \cdot \{z - s\}) \cdot \gamma^k(s, J \cdot \{z - s\}) \cdot dz$$

und schreiben wiederum $x + t$ an Stelle von y. Es resultiert schliesslich für die Ordnung der Gesunden die Schlussgleichung

$$l^{gg}(x + t) = l^{gg}(x) + \int_x^{x+t} l^{gg}(s) \cdot K(s, x + t) \cdot ds \qquad (15)$$

Dies ist eine *Volterra'sche Integralgleichung II. Art.* Die Funktion $K(s, x + t)$ unter dem Integralzeichen nennt man den Kern der Integralgleichung.

Die weitere Aufgabe, die Ordnung der Kranken zu berechnen, bietet uns nun keine weiteren Schwierigkeiten mehr. Sobald einmal die Ordnung der Gesunden bekannt ist, erhält man $l^{kk}(x + t)$ durch Integration des Ausdruckes

$$l^{kk}(x + t) = \int_x^{x+t} l^{gg}(s) \cdot \varepsilon^g(s) \cdot p^k(s; J\{x + t - s\}) \cdot ds \qquad (16)$$

Unser Problem ist somit auf die Lösung der Integralgleichung (15) zurückgeführt. Damit befinden wir uns aber auf bekanntem Gebiete und können die Frage theoretisch als erledigt betrachten. Aus der Theorie der Integralgleichungen [16] ist uns nämlich bekannt, dass eine Gleichung vom Volterra'schen Typus II. Art eine und nur eine Lösung besitzt. Ist die gegebene Gleichung

$$f(x) = f(a) + \lambda \int_a^x f(s) \cdot K(s\,;x) \cdot ds$$

so hat ihre Lösung die Form

$$f(x) = f(a) + \lambda \int_a^x f(a) \cdot S(s,x\,;\lambda) \cdot ds$$

wo $S(s, x; \lambda)$ der lösende Kern heisst und seinerseits wiederum durch die iterierten Kerne

$$K^{(1)}(s\,,x) = K(s\,,x)\ ;\ K^{(n)}(s\,,x) = \int_s^x K(y\,,x) \cdot K^{(n-1)}(s\,,y) \cdot dy \tag{17}$$

gegeben ist zu

$$S(s,x\,;\lambda) = K^{(1)}(s,x) + \lambda \cdot K^{(2)}(s,x) + \ldots . + \lambda^{n-1} \cdot K^{(n)}(s,x) + \ldots . \tag{18}$$

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass man aus (16) durch Differentiation nach t einen ähnlichen Ausdruck erhält, wie (14*):

$$\frac{dl^{kk}(x+t)}{dt} = l^{gg}(x+t) \cdot \varepsilon^{g}(x+t) - \int_x^{x+t} l^{gg}(s) \cdot$$

$$\cdot\, \varepsilon^{g}(s) \cdot p^{k}(s\,;J\{x+t-s\}) \cdot \left[\mu^{k}(s\,;J\{x+t-s\}) + \gamma^{k}(s;J\{x+t-s\}) \right] \cdot ds \tag{19}$$

Die Gleichungen (14*) und (19) bilden zusammen ein System von simultanen Integrodifferentialgleichungen, welches den Zusammenhang zwischen den Grössen $l^{gg}(x+t)$ und $l^{kk}(x+t)$ ebenfalls cha-

rakterisiert. Es ergibt sich daraus als Spezialfall leicht das System simultaner Differentialgleichungen, welches Du Pasquier [17] in seiner Theorie der Invaliditätsversicherung angegeben hat. Nimmt man nämlich an, μ^k und γ^k seien nicht von der Krankheitsdauer, sondern nur von dem erreichten Alter abhängig, so kann man setzen $\mu^k(s; J \cdot \{x+t-s\}) = \mu^k(x+t)$ und $\gamma^k(s; J \cdot \{x+t-s\}) = \gamma^k(x+t)$ unter Berücksichtigung von (16) ergibt sich aus (14*) und (19) und das System:

$$\begin{aligned} \frac{dl^{gg}(x+t)}{dt} &= l^{kk}(x+t) \cdot \gamma^k(x+t) - l^{gg}(x+t) \left[\mu^g(x+t) + \varepsilon^g(x+t) \right] \\ \frac{dl^{kk}(x+t)}{dt} &= l^{gg}(x+t) \cdot \varepsilon^g(x+t) - l^{kk}(x+t) \left[\mu^k(x+t) + \gamma^k(x+t) \right] \end{aligned} \tag{19*}$$

§ 5. Der Krankenkoeffizient $z(x+t)$ und die beobachtete Zahl der Krankentage ${}^{(t)}K(x+t)$.

Für gewisse Betrachtungen ist es dienlich, den Quotienten

$$z(x+t) = \frac{l^{kk}(x+t)}{l(x+t)} \tag{20}$$

einzuführen. Wir nennen ihn den *Krankenkoeffizienten*. Er stellt in jedem Augenblicke das Verhältnis dar zwischen der Anzahl der kranken und der Anzahl der überhaupt vorhandenen Personen eines bestimmten Alters. Analog gibt uns $(1 - z(x+t))$ in jedem Zeitpunkte das Verhältnis zwischen der Anzahl der gesunden und der Anzahl der vorhandenen Personen an.

Wenn der Krankenkoeffizient für jedes Alter als bekannt angenommen werden darf, so lassen sich die Ordnung der Gesunden und die Ordnung der Kranken aus der Ueberlebensordnung direkt berechnen.

$$\begin{aligned} l^{gg}(x+t) &= (1 - z(x+t)) \cdot l(x+t) \\ l^{kk}(x+t) &= z(x+t) \cdot l(x+t) \end{aligned} \tag{21}$$

Nun ist es möglich, $z(x+t)$ aus der Beobachtung näherungsweise zu bestimmen. In einer Krankheitsstatistik finden sich

nämlich in der Regel für jedes Alter $(x+t)$ die Zahl der Krankentage ${}^{(t)}K(x+t)$ angegeben, welche insgesamt von $M(x+t)$ beobachteten Mitgliedern einer Kasse während eines Jahres durchlebt worden sind. Diese selbe Krankenzeit lässt sich auch ausdrücken durch das Integral

$$\int_0^1 l^{kk}(x+t+s) \cdot ds$$

Wenn J noch die Zahl der Tage eines Jahres bedeutet, so besteht die Gleichung

$${}^{(t)}K(x+t) = J \cdot \int_0^1 l^{kk}(x+t+s) \cdot ds$$

Nach dem Mittelwertsatz ist erlaubt, zu schreiben

$$\begin{aligned} {}^{(t)}K(x+t) &= J \cdot l^{kk}(x+t+\vartheta) \; ; \; (0 \leqq \vartheta \leqq 1) \\ &= J \cdot M(x+t+\vartheta) \cdot z(x+t+\vartheta) \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich für den Krankenkoeffizienten

$$z(x+t+\vartheta) = \frac{1}{J} \cdot \frac{{}^{(t)}K(x+t)}{M(x+t+\vartheta)} \tag{22}$$

Indem für ϑ z. B. die Werte $\frac{1}{2}$, 1 oder 0 gesetzt werden, ergeben sich sofort Spezialfälle dieser Formel, die sich für die genäherte Berechnung eignen.

Es ist in diesem Zusammenhang noch darauf aufmerksam zu machen, dass die soeben abgeleitete Formel auch nur eine Näherung darstellt. Sie darf ferner nur verwendet werden, wenn sich die Beobachtungswerte für ${}^{(t)}K(x+t)$ auf eine unbeschränkte Dauer der Kassenleistungen beziehen. Andernfalls müssen die Werte mit Hilfe des Reduktionsfaktors zuerst umgerechnet werden.

Die hier gegebene Ableitung der Berechnungsformel für den Krankenkoeffizienten hat, obwohl sie einfach ist, den Nachteil, dass sie den tiefern Einblick in die Vorgänge des Erkrankens und Genesens verschliesst und daher nicht ersehen lässt, unter welchen

Bedingungen die mit einem derart berechneten $z(x+t)$ ermittelten Werte für $l^{gg}(x+t)$ und $l^{kk}(x+t)$ als numerische Lösungen der Integralgleichungen (15) und (16) angesehen werden dürfen. Wir werden daher in einem anderen Zusammenhange*) nochmals auf die Berechnung dieses Koeffizienten zurückkommen.

§ 6. Die Erkrankungsintensität und die Zahl der in einem Jahr beobachteten Krankheitsfälle $F(x+t)$.

In einem Zeitpunkte s Jahre nach Beginn der Beobachtung sind $l^{gg}(x+s)$ gesunde Personen des Alters $(x+s)$ vorhanden. Die Zahl der Krankheitsfälle der $(x+t)$-jährigen während eines laufenden Jahres stellt sich dar durch den Integralausdruck

$$F(x+t) = \int_{t}^{t+1} l^{gg}(x+s) \cdot \varepsilon^{g}(x+s) \cdot ds$$

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes ergibt sich hieraus als einfache Formel zur Berechnung der Erkrankungsintensität

$$\varepsilon^{g}(x+t+\vartheta) = \frac{F(x+t)}{l^{gg}(x+t+\vartheta)} \qquad (0 \leq \vartheta \leq 1) \tag{23}$$

Spezialfälle ergeben sich sofort, wenn man wiederum für ϑ bestimmte Werte einsetzt.

Die in dieser Formel auftretende Ordnung der Gesunden berechnet man vorher aus der Zahl der beobachteten Mitglieder mit Hilfe des Krankenkoeffizienten nach Formel (21), wobei letzterer auf die im vorigen Paragraphen gezeigte Art ermittelt wird. Will man aber die Erkrankungsintensität *direkt*, d. h. unter Umgehung der vorherigen Berechnung der Werte für $z(x+t)$ und $l^{gg}(x+t)$, aus der Beobachtung bestimmen, so hat man nur den Ausdruck (22) in Formel (23) einzuführen. Es resultiert dann eine Formel für die Erkrankungsintensität, die nur noch die Beobachtungszahlen $F(x+t)$, $M(x+t)$ und ${}^{(t)}K(x+t)$ enthält, nämlich:

$$\varepsilon^{g}(x+t+\vartheta) = \frac{F(x+t)}{M(x+t+\vartheta) - \frac{1}{j} \cdot {}^{(t)}K(x+t)} \tag{24}$$

*) Siehe § 8.

§ 7. Berechnung der Intensitäten $\sigma^k(s,\tau)$, $\mu^k(s,\tau)$ und $\gamma^k(s,\tau)$.

a) Die Entkrankungsintensität $\sigma^k(s,\tau)$.

In neueren Krankheitsstatistiken sind oft für jedes Alter oder doch für bestimmte Altersgruppen die Entkrankungsordnungen $l^k(s,\tau)$ angegeben. Denn ihre Ermittlung aus der Zahl der ausgezählten Krankheitsfälle ist einfach, wenn für jeden Krankheitsfall auch die Krankheitsdauer bekannt ist. Man hat nur für jede in Tagen oder Wochen angegebene Krankheitsdauer die Zahl der verbliebenen Krankheitsfälle zu tabellieren.

Aus einer derartigen Entkrankungsordnung lässt sich die Entkrankungsintensität ohne weiteres bestimmen. Es ist nämlich

$$dl^k(s,\xi) = -\,l^k(s,\xi)\cdot\sigma^k(s,\xi)\cdot d\xi$$

Durch Integration links und rechts erhält man hieraus

$$l^k(s,\tau) - l^k(s,\tau+1) = \int_{\tau}^{\tau+1} l^k(s,\xi)\cdot\sigma^k(s,\xi)\cdot d\xi$$

woraus wir schliesslich für die Entkrankungsintensität die Näherungsformel erhalten

$$\sigma^k(s,\tau+\vartheta) = \frac{l^k(s,\tau) - l^k(s,\tau+1)}{l^k(s,\tau+\vartheta)} \qquad (25)$$

$$(o \leqq \vartheta \leqq 1)$$

b) Die Intensitäten $\mu^k(s,\tau)$ und $\gamma^k(s,\tau)$.

Diese beiden Grössen stehen mit der jetzt als bekannt anzusehenden Entkrankungsintensität in der einfachen Relation

$$\sigma^k(s,\tau) = \mu^k(s,\tau) + \gamma^k(s,\tau)$$

Wenn also eine davon ebenfalls noch als bekannt angesehen werden kann, so ist die andere bestimmt.

Die direkte Bestimmung von $\mu^k(s,\tau)$ und $\gamma^k(s,\tau)$ aus der Beobachtung bietet keine Schwierigkeiten, sofern im statistischen

Material für jedes Alter und für jede Krankheitsdauer die Anzahl der infolge Tod bzw. Genesung zum Abschluss gekommenen Krankheitsfälle angegeben sind. Bedeutet zum Beispiel

$T(s,\tau)$ = die Zahl der Todesfälle am τ-ten Tage bei den $l^{k}_{(s,\tau)}$ Personen, welche im Alter s erkrankt sind,

so kann geschrieben werden

$$T(s,\tau) = \int_{\tau}^{\tau+1} l^{k}(s,\xi) \cdot \mu^{k}(s,\xi) \cdot d\xi$$

Hieraus ergibt sich nach bereits bekannten Ueberlegungen die einfache Formel

$$\mu^{k}(s,\tau+\vartheta) = \frac{T(s,\tau)}{l^{k}(s,\tau+\vartheta)} \qquad (26)$$

$$(o \leqq \vartheta \leqq 1)$$

Für die Genesungsintensität erhalten wir einen Ausdruck von analoger Gestalt, wenn an Stelle von $T(s,\tau)$

$G(s,\tau)$ = die Anzahl der Genesungsfälle am τ-ten Tage bei den $l^{k}_{(s,\tau)}$-Personen, welche im Alter s erkrankt sind,

verwendet wird.

Indessen bestehen bis heute noch keinerlei statistische Untersuchungen über die Genesung oder die Sterblichkeit der Kranken und die Zahlen $T(s,\tau)$ und $G(s,\tau)$ finden sich in keiner Krankheitsstatistik angegeben. Man ist daher vorderhand darauf angewiesen, irgendwelche hypothetische Annahmen zu treffen, wenn man die Entkrankungsintensität in ihre beiden Komponenten zerlegen will. Das nächstliegende scheint zu sein, dass man bei numerischen Auswertungen für die Sterblichkeit der Kranken etwa eine Selektionssterbetafel der Invaliden zugrunde legt. Obwohl dieses Vorgehen nicht einwandfrei ist, wird es doch wahrheitsgetreuere Resultate liefern, als wenn man die Sterblichkeit der Kranken gleich der der Gesunden setzt oder sie überhaupt vernachlässigt.

§ 8. Diskussion der Formel (16) für die Ordnung der Kranken.

Die in § 4 abgeleitete Formel (16) für die Ordnung der Kranken können wir für ein ganzzahliges t auch in der Form schreiben

$$l^{kk}(x+t) = \sum_{n=o}^{t-1} \int_0^1 l^{gg}(x+n+s) \cdot \varepsilon^g(x+n+s) \cdot$$
$$\cdot p^k(x+n+s;\ J \cdot \{t-n-s\}) \cdot ds$$

wenn wir die Integration jeweilen nur über ein Jahr ausführen und die einzelnen Integrale addieren. Indem wir nun einige vereinfachende Annahmen treffen, können wir das Integral im letzten Ausdrucke nach und nach eliminieren und erhalten dann für (16) eine Näherungsformel, welche nur noch wohlbekannte Grössen enthält und für praktische Berechnungen geeignet ist.

1. *Annahme:* Die Krankheitsfälle verteilen sich gleichmässig über das Jahr.

Diese Annahme erlaubt uns, zu setzen

$$l^{gg}(x+n+s) \cdot \varepsilon^g(x+n+s)$$
$$= l^{gg}(x+n+\vartheta) \cdot \varepsilon^g(x+n+\vartheta) = \text{konstant};\ \left(\begin{matrix}\vartheta = konstant \\ o \leqq \vartheta \leqq 1\end{matrix}\right)$$

so dass unsere Formel die Gestalt annimmt:

$$l^{kk}(x+t) = \sum_{n=o}^{t-1} l^{gg}(x+n+\vartheta) \cdot \varepsilon^g(x+n+\vartheta) \cdot$$
$$\cdot \int_o^1 p^k(x+n+s;\ J \cdot \{t-n-s\}) \cdot ds \qquad (27)$$

2. *Annahme:* Die im Alter $(x+n+s)$ bis $(x+n+s+1)$ erkrankten Personen sollen nach der gleichen Entkrankungsordnung $l^k(x+n+\vartheta;\ \xi)$ wiederum aus dem Bestande der Kranken ausscheiden. Demnach dürfen wir schreiben:

$$p^k(x+n+s;\ J \cdot \{t-n-s\}) = p^k(x+n+\vartheta);\ J \cdot \{(t-n-s\})$$

Nun setzen wir noch der Kürze halber

$$J \cdot \{t-n-s\} = \eta$$
$$ds = -\frac{1}{J} \cdot d\eta$$

Grenzen	
s	η
0	$J \cdot \{t-n\}$
1	$J \cdot \{t-n-1\}$

Dann geht das Integral rechter Hand, wenn wir noch die Integrationsgrenzen vertauschen um das Minuszeichen wegzuschaffen, über in das folgende:

$$\frac{1}{J} \int_{J \cdot \{t-n-1\}}^{J \cdot \{t-n\}} p^k (x+n+\vartheta ; \eta) \cdot d\eta$$

$$= \frac{1}{J} \left[\int_0^{J \cdot \{t-n\}} p^k (x+n+\vartheta ; \eta)\, d\eta - \int_0^{J \cdot \{t-n-1\}} p^k (x+n+\vartheta ; \eta) \cdot d\eta \right]$$

Führen wir nun noch die Abkürzung ein

$$\int_0^{J \cdot \tau} p^k (z ; \eta) \cdot d\eta = \frac{1}{l^k (z ; o)} \int_0^{J \cdot \tau} l^k (z ; \eta) \cdot d\eta = D_{(z)}^{(J \cdot \tau)}$$

und bedenken dabei, dass $D_{(z)}^{(J \cdot \tau)}$ nichts anderes bedeutet, als die durchschnittliche Krankheitsdauer bei einer maximalen Krankenzeit von $J \cdot \tau$ Tagen, dem entsprechend also

$$\int_0^{\infty} p^k (z ; \eta) \cdot d\eta = D_{(z)}$$

die durchschnittliche Krankheitsdauer bei unbeschränkter maximaler Krankenzeit, so können wir mit Hilfe des bereits in der Einleitung erwähnten Reduktionsfaktors die Beziehung herstellen:

$$\frac{1}{J} \cdot D_{(z)}^{(J \cdot \tau)} = \frac{1}{J} \cdot D_{(z)} \cdot R_{z\,(J \cdot \tau)}$$

Wenden wir diese auf die Formel (27) an, so verschwindet daselbst das Integral, und wir haben

$$l^{kk}(x+t) = \frac{1}{J} \cdot \sum_{n=o}^{t-1} l^{gg}(x+n+\vartheta) \cdot \varepsilon^{g}(x+n+\vartheta) \cdot D(x+n+\vartheta) \cdot \cdot \left[R_{x+n+\vartheta}(J \cdot \{t-n\}) - R_{x+n+\vartheta}(J \cdot \{t-n-1\}) \right] \quad (28)$$

Erfahrungsgemäss wird für grosse Krankheitsdauern $J \cdot \tau$ der Reduktionsfaktor $R_z\ (J \cdot \tau)$ angenähert gleich 1. Diese Tatsache benützen wir, um die Formel (28) noch weiter zu vereinfachen und für praktische Berechnungen handlicher zu gestalten. Machen wir beispielsweise noch die

3. *Annahme:* Keine Krankheit daure länger, als ein Jahr, dann wird für jedes $\tau \geqq 1$

$$R_z(J \cdot \tau) = 1 \quad ; [\tau \geqq 1]$$

und damit also

$$R_z(J \cdot \tau) - R_z(J \cdot \{\tau - 1\}) = o \cdot [\tau \geqq 1]$$

und weil noch $R_z(o) = o$ ist, wird schliesslich

$$R_z(J) - R_z(o) = 1$$

In der Formel (28) verschwinden also alle Summanden, bis auf den letzten, so dass nur noch bleibt:

$$l^{kk}(x+t) = \frac{1}{J} \cdot l^{gg}(x+t-1+\vartheta) \cdot \varepsilon^{g}(x+t-1+\vartheta) \cdot D(x+t-1+\vartheta) \quad (29)$$

Der letzte Ausdruck kann nun als Rekursionsformel zur Berechnung der Ordnung der Kranken und der Ordnung der Gesunden verwendet werden. Dazu ist die Kenntnis der Erkrankungsintensität, der durchschnittlichen Krankheitsdauer und ferner der Gesamtüberlebensordnung notwendig. Die Ueberlebensordnung

muss deshalb bekannt sein, weil nach jedem Schritt der Rechnung von der Ordnung der Kranken mittels der Beziehung

$$l^{gg}(x+t) = l(x+t) - l^{kk}(x+t)$$

zur Ordnung der Gesunden übergegangen werden muss.

Aus der Formel (29) lassen sich ohne weiteres noch die Beziehungen für den Krankenkoeffizienten ableiten, wie sie in § 5 gefunden worden sind. In der Einleitung haben wir nämlich die durchschnittliche Krankheitsdauer definiert als das Verhältnis zwischen den Beobachtungszahlen ${}^{(t)}K(x+t)$ und $F(x+t)$. Somit ist erlaubt, zu schreiben:

$$l^{kk}(x+t) = l(x+t) \cdot z(x+t)$$

$$= \frac{1}{J} l^{gg}(x+t-1+\vartheta) \cdot \varepsilon^{g}(x+t-1+\vartheta) \cdot \frac{{}^{(t)}K(x+t-1+\vartheta)}{F(x+t-1+\vartheta)}$$

Kürzen wir noch $F(x+t-1+\delta)$ gegen $l^{gg}(x+t-1+\delta) \cdot \varepsilon^{g}(x+t-1+\delta)$, so bleibt schlussendlich der einfache Ausdruck:

$$z(x+t) = \frac{{}^{(t)}K(x+t-1+\vartheta)}{J \cdot l(x+t)} \qquad (30)$$

Dieser ist der Formel (22) in § 5 analog. Es ist uns also gelungen, hier die gleichen Zusammenhänge zu konstruieren, die wir früher auf andere Weise kennen gelernt haben, indem wir für die Erkrankungs- und Genesungsvorgänge die vorstehenden drei bestimmten, vereinfachenden Annahmen gemacht haben. Das Näherungsverfahren für die Berechnung der Grössen $z(x+t)$ und $l^{kk}(x+t)$ wird jedoch durch diese neue Ableitung viel eingehender durchleuchtet. Es ist dabei auch ersichtlich, wie das Verfahren zu modifizieren ist, wenn insbesondere die dritte Voraussetzung bei einem bestimmten Beobachtungsmaterial nicht gemacht werden darf. Massgebend dafür ist die Formel (28).

Bis dahin haben wir uns auf ein ganzzahliges t beschränkt, also nur auf die Bestimmung der Werte $l^{kk}(x+t)$ von Jahr zu Jahr geachtet. Zum Schlusse betrachten wir noch kurz den Fall,

wo t keine ganze Zahl ist. Dabei beschränken wir uns allerdings in unserer Untersuchung auf ein t, welches zwischen 0 und 1 liegt. Es interessiert uns also speziell, wie die Entwicklung im ersten Jahre vor sich geht.

Ausgangspunkt ist wiederum die Formel (16). Diese kann für $o \leqq t \leqq 1$ wegen der Annahme 1 geschrieben werden

$$l^{kk}(x+t) = l^{gg}(x+\vartheta) \cdot \varepsilon^{g}(x+\vartheta) \cdot \int_{o}^{t} p^{k}(x+s\,;\, J \cdot \{t-s\}) \cdot ds$$

und die zweite Annahme gestattet noch die Umformung des Ausdruckes zu

$$l^{kk}(x+t) = \frac{1}{J} \cdot l^{gg}(x+\vartheta) \cdot \varepsilon^{g}(x+\vartheta) \cdot \int_{o}^{J \cdot t} p^{k}(x+\vartheta\,;\,\eta) \cdot d\eta$$

$$= \frac{1}{J} \cdot l^{gg}(x+\vartheta) \cdot \varepsilon^{g}(x+\vartheta) \cdot D^{(J \cdot t)}(x+\vartheta)$$

woraus nach einigen elementaren Umformungen folgt:

$$z(x+\vartheta) = \frac{{}^{(t)}K(x+\vartheta) \cdot R_{x+\vartheta}(J \cdot t)}{J \cdot l(x+t)} \sim \frac{1}{J} \cdot k(x+\vartheta) \cdot R_{x+\vartheta}(J \cdot t) \tag{31}$$

Die Grössen $k(x+\delta)$ und $\mathrm{R}_{x+\vartheta}(J \cdot t)$ können wiederum als bekannt angesehen werden. Da immer $R_z(o) = o$ ist, erhalten wir speziell für den Beginn der Beobachtung

$$z(x) = l^{kk}(x) = o$$

was mit den Ergebnissen (2) in § 1 ohne weiteres im Einklang steht. Im Laufe des ersten Beobachtungsjahres wächst der Bestand der Kranken ausserordentlich stark an. Das Ansteigen wird im wesentlichen charakterisiert durch den Verlauf des Reduktionsfaktors.

Der Weg zur Ermittlung der grundlegenden Masszahlen ist jetzt gewiesen und wir können somit unsere Betrachtungen über die versicherungstechnischen Grundgrössen abschliessen. Wir kennen nun die Bausteine, mit denen das mathematische Gebäude der Krankenversicherung errichtet werden kann. In den folgenden Kapiteln soll jetzt gezeigt werden, wie sich die finanziellen Vorgänge in einer gegen Krankheit versicherten Personengesamtheit abwickeln.

Kapitel II.

Die private Krankenversicherung.

In diesem Kapitel sollen die finanziellen Vorgänge in der privaten Krankenversicherung betrachtet werden. In der privaten Krankenversicherung steht jeder Versicherte in einem individuellen Vertragsverhältnis mit der Versicherungskasse. Die Kasse verpflichtet sich dem Versicherten gegenüber zu bestimmten Leistungen bei Eintritt eines Schadenfalles, wogegen sie von ihm entsprechende Gegenleistungen verlangt, wenn er sich in gesundem Zustande befindet. Die vertraglichen finanziellen Verpflichtungen beider Parteien müssen sich dabei in jedem Zeitpunkte das Gleichgewicht halten.

In unserer Betrachtung beschränken wir uns auf den Fall der reinen Krankenversicherung. Die Krankenkasse übernehme also nur die Deckung der Schäden, die unmittelbar durch Krankheit entstehen. Wir sehen demnach ab von jeglichen Zusatzleistungen.

§ 1. Die Versicherungsleistungen U_x.

Bei Eintritt eines Schadenfalles hat die Versicherungskasse zur Erfüllung der übernommenen Verpflichtungen einen Betrag U_x für jede Person bereitzustellen. Während dies nun z. B. in der Lebensversicherung ein fester Betrag U ist, kann es sich in der Krankenversicherung normalerweise nur um Durchschnittsbeträge handeln. Denn bei Eintritt eines Krankheitsfalles kann man zum vornherein nichts bestimmtes aussagen über dessen Verlauf und den davon abhängigen Kostenaufwand. Um daher die durchschnittliche mutmassliche Höhe dieses Betrages U_x zum voraus rechnerisch erfassen zu können, muss die Abfallsordnung

der Fälle als Funktion der aufgewendeten Kassenleistungen bekannt sein. Bedeutet beispielsweise

τ = die Zahl der für einen einzelnen Fall bereits ausgerichteten Leistungseinheiten (Zahl der Krankentage, Krankenhaustage, Arztkosten ausgedrückt in Währungseinheiten usw.),

so ist dazu

$\lambda(x; \tau)$ = die Zahl der Fälle, welche bereits einen Kostenaufwand von τ Einheiten erfordert haben, aber noch weiterdauern,

auf statistischem Wege zu bestimmen. Dabei bedeutet sinngemäss

$\lambda(x; o)$ = die Zahl der ursprünglich im Alter x eingetretenen Krankheitsfälle.

Handelt es sich um die Krankengeldversicherung, wo τ die Krankheitsdauer in Tagen bezeichnet, wenn die Tagesleistung 1 entrichtet wird, so bedeutet $\lambda(x; \tau)$ nichts anderes, als die bereits früher eingeführte Entkrankungsordnung $l^k(x; \tau)$. Die Abfallsordnungen $\lambda(x; \tau)$ können allgemein auch entsprechend ermittelt werden, wie dies für die Entkrankungsordnung im § 3 des I. Kapitels angedeutet wurde.*)

Für ein im Alter x erkranktes Kassenmitglied beträgt nun die Zahl der durchschnittlich aufzuwendenden Leistungseinheiten, wenn maximal τ Einheiten entrichtet werden,

$$U_{x;\overline{\tau}|} = \frac{1}{\lambda(x;o)} \int_o^\tau \lambda(x;\xi) \cdot d\xi \qquad (32)$$

Werden Leistungen bis zu unbeschränkter Höhe ausgerichtet, so ist der entsprechende Durchschnittswert

$$U_{x;\overline{\infty}|} = \frac{1}{\lambda(x;o)} \int_o^\infty \lambda(x;\xi) \cdot d\xi \qquad (33)$$

Ganz analog, wie in der Krankengeldversicherung, können wir hier einen Reduktionsfaktor als Hilfsgrösse einführen. Wir

*) Siehe diesbezüglich die schon mehrmals zitierte Arbeit von *H. Wagner*, Abschnitt C., an den sich auch die übrigen Ausführungen dieses Paragraphen zum Teil halten.

bekommen so für jede Form der Krankengeldversicherung einen speziellen Reduktionsfaktor, der durch den Ausdruck

$$R_x(\tau) = \frac{U_{x;\overline{\tau}|}}{U_{x;\overline{\infty}|}} = \frac{\int_0^{\tau} \lambda(x;\xi) \cdot d\xi}{\int_0^{\infty} \lambda(x;\xi) \cdot d\xi} \qquad (34)$$

definiert ist. Er stellt also das Verhältnis dar zwischen den durchschnittlichen Kassenleistungen bei einer maximalen Leistung von τ Einheiten und den durchschnittlichen Kassenleistungen bei unbeschränkter Leistungshöhe. Diese Definition stimmt, bei entsprechender Uebertragung, selbstverständlich mit der in der Krankengeldversicherung üblichen vollständig überein.

Mit Hilfe der Durchschnittswerte $Ux;\overline{\tau}|$ können wir nun bereits eine grosse Zahl von Problemen der Krankenversicherung einwandfrei lösen. Insbesondere lassen sich statutarische Bestimmungen über die Kassenleistungen zu einem grossen Teil ohne weiteres in den mathematischen Ausdrücken erfassen. Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel:

Eine Krankenkasse trage bis zu einem Höchstbetrage von τ_1 Leistungseinheiten die vollen Kosten, dann bis zur Kostengrenze τ_2 noch α % und bis zu einer weiteren Kostengrenze τ_3 noch β %. Dann höre die Leistungspflicht für einen Krankheitsfall auf. Ferner soll der Versicherte in jedem Falle die Kosten bis zu τ_0 Leistungseinheiten selber tragen. Es richtet somit eine derart praktizierende Kasse für jeden Krankheitsfall durchschnittlich

$$U_x = \frac{100-\alpha}{100} \cdot U_{x;\overline{\tau_1}|} + \frac{(\alpha-\beta)}{100} \cdot U_{x;\overline{\tau_2}|} + \frac{\beta}{100} \cdot U_{x;\overline{\tau_3}|} - U_{x;\overline{\tau_0}|}$$

Einheiten aus. Uebertragen wir die gleichen Bedingungen auf eine Krankengeldversicherungskasse, so bedeutet das: Bis zur Krankheitsdauer von τ_1 Tagen wird das volle Taggeld, von da an bis zur Dauer τ_2 noch α % und schliesslich bis zur Dauer τ_3 noch β % desselben bezahlt. Für jeden Krankheitsfall wird eine Karenzzeit von τ_0 Tagen vorbehalten.

§ 2. Die Gesundenrente.

An die Zugehörigkeit eines Versicherten zum Stamme der Gesunden sei die Zahlung eines jährlichen Betrages 1 in kontinuierlichen Raten gebunden. Der Barwert dieser Gesundenrente 1 ist, unbeschränkte (lebenslängliche oder besser „gesundheitslängliche") Zahlung vorausgesetzt, durch das Integral

$$\bar{a}^{gg}_{x+t} = \frac{1}{l^{gg}(x+t)} \int_0^\infty v^\xi \cdot l^{gg}(x+t+\xi) \cdot d\xi \tag{35}$$

darstellbar und die temporäre Gesundenrente, bei einer Rentendauer von n Jahren, besitzt den Barwert

$$\bar{a}^{gg}_{x+t;\overline{n}|} = \frac{1}{l^{gg}(x+t)} \int_0^n v^\xi \cdot l^{gg}(x+t+\xi) \cdot d\xi \tag{36}$$

Um gleich hier auf einige mathematische Eigenschaften des Rentenbarwertes $\bar{a}^{gg}_{x+t}$ hinzuweisen, differenzieren wir einmal den Ausdruck (35) nach der Zeit t, welche seit dem Rentenbeginn verflossen ist. Wenn wir noch die Bezeichnung

$$\delta = -\ln v$$

einführen, so erhalten wir

$$\frac{d\,\bar{a}^{gg}_{x+t}}{dt} = \left[-\frac{dl^{gg}(x+t)}{dt \cdot l^{gg}(x+t)} + \delta \right] \cdot \bar{a}^{gg}_{x+t} - 1$$

Unter Anwendung von Gleichung (14) des § 4 im Kapitel I. ergibt sich hieraus für den Barwert der Gesundenrente schliesslich die lineare Differentialgleichung I. Ordnung

$$\frac{d\,\bar{a}^{gg}_{x+t}}{dt} = \left[v^g(x+t) - \frac{G(x+t)}{l^{gg}(x+t)} + \delta \right] \cdot \bar{a}^{gg}_{x+t} - 1 \tag{37}$$

Diese Formel stimmt im Aufbau vollständig überein mit der von Jörgensen [18] veröffentlichten Thiele'schen Differentialgleichung für den gewöhnlichen Leibrentenbarwert,

$$\frac{d\,\bar{a}_x}{dx} = [\mu(x) + \delta] \cdot \bar{a}_x - 1$$

nur steht an Stelle der Sterblichkeitsintensität die Intensität der Abnahme der Gesunden, dargestellt durch die Differenz

$$v^g(x+t) - \frac{G(x+t)}{l^{gg}(x+t)}$$

Indem wir den ersten Differentialquotienten gleich Null setzen, erhalten wir die Bedingungsgleichung für Extremwerte von $\bar{a}^{gg}_{x+t}$. Sie lautet, nach $\bar{a}^{gg}_{x+t}$ aufgelöst:

$$\text{Extr. } \bar{a}^{gg}_{x+t} = \frac{1}{\delta + v^g(x+t) - \dfrac{G(x+t)}{l^{gg}(x+t)}}$$

Um noch kurz eine Deutung der Differentialgleichung (37) wiederzugeben, leiten wir diese noch direkt aus den gegebenen Elementen ab. Wir vermeiden also den Umweg über das Integral (35).

Für die Rente, deren Barwert wir mit $\bar{a}^{gg}_{x+t}$ bezeichnen, besteht die Bestimmung, dass sie zahlbar ist während der Dauer der Zugehörigkeit zum Bestande der Gesunden. Da in einem Zeitpunkte ξ Jahre nach Rentenbeginn insgesamt $l^{gg}(x+\xi)$ Rentenbezüger vorhanden sind, beträgt der Barwert aller laufenden Gesundenrenten zu dieser Zeit

$$l^{gg}(x+\xi) \cdot \bar{a}^{gg}_{x+\xi}$$

Die Aenderung dieses Betrages im nächsten Zeitmomente $d\,\xi$ wird durch das Differential

$$l^{gg}(x+\xi) \cdot d\,\bar{a}^{gg}_{x+\xi} + d\,l^{gg}(x+\xi) \cdot \bar{a}^{gg}_{x+\xi} \qquad (\alpha)$$

dargestellt. Die Ursachen der Aenderung sind die folgenden: Erstens wächst die Summe $l^{gg}(x+\xi) \cdot \bar{a}^{gg}_{x+\xi}$ infolge der Verzinsung an um den Betrag

$$l^{gg}(x+\xi) \cdot \bar{a}^{gg}_{x+\xi} \cdot \delta \cdot d\xi \qquad (\beta)$$

und dann werden während der Zeitspanne $d\xi$ an alle $l^{gg}(x+\xi)$ Rentner Zahlungen ausgerichtet von der Höhe

$$l^{gg}(x+\xi) \cdot d\xi \qquad (\gamma)$$

Diese Einzelposten, welche die „Einnahmen" und „Ausgaben" im nächsten Momente darstellen, können wir nach dem Schema

$$(\alpha) = (\beta) - (\gamma)$$

zu einer Gleichung zusammenfassen. Wenn wir daraus den Quotienten $\frac{d\,\bar{a}^{gg}_{x+\xi}}{d\,\xi}$ bilden und abermals den Ausdruck (14) in § 1 des Kapitels I berücksichtigen, so bekommen wir wiederum die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d\,\bar{a}^{gg}_{x+\xi}}{d\,\xi} = \left[v^{g}(x+\xi) - \frac{G\,(x+\xi)}{l^{gg}(x+\xi)} + \delta \right] \cdot \bar{a}^{gg}_{x+\xi} - 1 \qquad (37)$$

Wir sind also auf ganz anderem Wege zur selben Differentialgleichung gelangt. Wenn wir bedenken, dass die eigentliche Hauptaufgabe nicht in der Herleitung der Differentialgleichung, sondern in der Auffindung eines geschlossenen Ausdruckes für den Rentenbarwert besteht, so scheint es gerechtfertigt, wenn wir die eben durchgeführte Betrachtungsweise als „indirekte Methode" bezeichnen. Diese indirekte Methode für die Lösung von Versicherungsproblemen kann bei allen ähnlichen Berechnungen Verwendung finden, wie wir in späteren Abschnitten zeigen werden, indem wir fast ausschliesslich davon Gebrauch machen wollen.

Statt, wie üblich, sofort einen Integralausdruck für den Barwert $\bar{a}^{gg}_{x+\xi}$ hinzuschreiben, haben wir also hier in erster Linie nach der Veränderung gefragt, welcher die gesuchte Grösse im nächsten Zeitmomente unterliegt. Der weitere Schritt in der

Erledigung des eigentlichen Problems besteht nun in der Auflösung der dabei gefundenen Differentialgleichung, welche allgemein von der sehr einfachen Form ist

$$\frac{d\,y\,(t)}{dt} + \varphi\,(t) \cdot y\,(t) + f\,(t) = o \tag{39}$$

und deren Lösung angegeben werden kann zu

$$y(t) = e^{-\int_o^t \varphi(t)\,\cdot\,dt}\left[C - \int_o^t f(\lambda) \cdot e^{+\int_o^\lambda \varphi(t)\,\cdot\,dt} \cdot\, d\,\lambda\right] \tag{40}$$

Nach der letzten Formel könnten wir also die Integration vornehmen und bekämen nach zweckmässiger Bestimmung der Konstanten C für den Rentenbarwert einen geschlossenen Ausdruck.

Wir gelangen aber zu demselben Resultate auch auf einem anderen Wege, der über die Integralgleichungen führt. Aus methodischen Gründen ziehen wir es vor, diesen einzuschlagen, und fassen daher die einzelnen Glieder unserer Differentialgleichung etwas anders zusammen, indem wir schreiben:

$$\frac{d\,\bar{a}^{gg}_{x+\xi}}{d\,\xi} - \delta \cdot \bar{a}^{gg}_{x+\xi} - \left[\left(v^{g}(x+\xi) - \frac{G\,(x+\xi)}{l^{gg}_{(x+\xi)}}\right) \cdot \bar{a}^{gg}_{x+\xi} - 1\right] = 0 \tag{41}$$

Die Gleichung ist wiederum vom Typus (39), und ihre Lösung hat die Gestalt

$$\bar{a}^{gg}_{x+t} = \frac{1}{v^{t}}\left[C + \int_o^t v^{\xi}\left[1 - \left(v^{g}(x+\xi) - \frac{G\,(x+\xi)}{l^{gg}_{(x+\xi)}}\right) \cdot \bar{a}^{gg}_{x+\xi}\right] \cdot d\,\xi\right] \tag{42}$$

Für die Bestimmung der Konstanten C bestehen zwei Möglichkeiten. Aus (42) geht allgemein hervor:

$$C = v^{t} \cdot \bar{a}^{gg}_{x+t} - \int_o^t v^{\xi}\left[1 - \left(v^{g}(x+\xi) - \frac{G\,(x+\xi)}{l^{gg}_{(x+\xi)}}\right) \cdot \bar{a}^{gg}_{x+\xi}\right] \cdot d\,\xi$$

Setzen wir zuerst $t = 0$, so erhalten wir

$$C_1 = \bar{a}^{gg}_x$$

und für $t = \infty$ ergibt sich

$$C_2 = -\int_0^\infty v^\xi \left[1 - \left(v^g(x+\xi) - \frac{G(x+\xi)}{l^{gg}(x+\xi)}\right) \cdot \bar{a}^{gg}_{x+\xi}\right] \cdot d\xi$$

da ja, wie wir oben gesehen haben, $\bar{a}^{gg}_\infty$ endlich sein muss und $v^\infty = o$ wird.

Je nachdem wir zur weiteren Rechnung C_1 oder C_2 verwenden, bekommen wir für den Rentenbarwert nach einigen einfachen Umformungen die beiden Integralgleichungen II. Art

$$\bar{a}^{gg}_{x+t} = \frac{1}{v^t}\left[\bar{a}^{gg}_x - \frac{1}{\delta}(v^t - 1)\right] + \frac{1}{v^t} \cdot \int_0^t v^\xi \cdot \left(v^g(x+\xi) - \frac{G(x+\xi)}{l^{gg}(x+\xi)}\right) \cdot \bar{a}^{gg}_{x+\xi} \cdot d\xi \tag{43a}$$

und

$$\bar{a}^{gg}_{x+t} = -\frac{1}{\delta} - \frac{1}{v^t} \cdot \int_t^\infty v^\xi \cdot \left(v^g(x+\xi) - \frac{G(x+\xi)}{l^{gg}(x+\xi)}\right) \cdot \bar{a}^{gg}_{x+\xi} \cdot d\xi \tag{43b}$$

wobei die erste das sogenannte „retrospektive" und die andere das „prospektive" Rechnen zur Darstellung bringt. Die beiden Gleichungen lassen sich nach der in § 4 des I. Kapitels angedeuteten Methode ohne weiteres lösen. Beiderorts finden wir denselben Kern

$$K(\xi; t) = v^{\xi - t} \cdot \left(v^g(x+\xi) - \frac{G(x+\xi)}{l^{gg}(x+\xi)}\right) = -v^{\xi-t} \cdot \frac{d\, l^{gg}(x+\xi)}{l^{gg}(x+\xi) \cdot d\xi} \tag{44}$$

und den gleichen Paramenter $\lambda = +1$. (Bei der Gleichung (43b) müssen wir, um die variable Grenze oben zu haben, die beiden Integrationsgrenzen vertauschen, wobei sich das Vorzeichen ändert.)

Beide Integralgleichungen besitzen demnach auch denselben lösenden Kern. Wir erhalten ihn aus den iterierten Kernen, die allgemein von der Form

$$K^{(n)}(\xi; t) = K(\xi; t) \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left[\operatorname{Log} \frac{l^{gg}(x+\xi)}{l^{gg}(x+t)} \right]^{n-1} \tag{45}$$

sind. Er lautet

$$S(\xi, t; 1) =$$

$$= K(\xi, t) \left[1 + \operatorname{Log} \frac{l^{gg}(x+\xi)}{l^{gg}(x+t)} + \frac{1}{2!} \left[\operatorname{Log} \frac{l^{gg}(x+\xi)}{l^{gg}(x+t)} \right]^2 + \cdots \right]$$

oder kürzer, da die eckige Klammer die Exponentialreihe enthält

$$S(\xi, t; 1) = K(\xi, t) \cdot \frac{l^{gg}(x+\xi)}{l^{gg}(x+t)} \tag{46}$$

Nun betrachten wir vorerst die Integralgleichung (43a). Bei Einführung des lösenden Kernes geht diese über in

$$\bar{a}^{gg}_{x+t} = \frac{1}{v^t} \left[\bar{a}^{gg}_x - \frac{1}{\delta} (v^t - 1) \right]$$

$$+ \frac{1}{\delta \cdot v^t \cdot l^{gg}(x+t)} \int_0^t \left(\delta \cdot \bar{a}^{gg}_x - v^\xi + 1 \right) \cdot d\, l^{gg}(x+\xi)$$

Wenn wir partiell integrieren, so fallen noch eine Reihe von Gliedern weg, und es bleibt nur noch

$$\bar{a}^{gg}_{x+t} = \frac{l^{gg}(x) \cdot \bar{a}^{gg}_x}{v^t \cdot l^{gg}(x+t)} - \frac{1}{v^t \cdot l^{gg}(x+t)} \int_0^t v^\xi \cdot l^{gg}(x+\xi) \cdot d\,\xi \tag{47}$$

Der Wert der Rente in einem Zeitpunkte t Jahre nach Beginn der Rentenzahlung ist also gleich dem aufgezinsten anfänglichen Anteil am gesamten Rentenwert, vermindert um den Anteil an den aufgezinsten Auszahlungen.

Die letzte Formel nimmt sofort eine etwas bekanntere Gestalt an, wenn wir sie ein bisschen umformen. Bezeichnen wir nämlich mit

$$\bar{a}^{gg}_{x;\,\overline{t}|} = \frac{1}{l^{gg}(x)} \int_0^t v^{\lambda} \cdot l^{gg}(x+\lambda) \cdot d\lambda \qquad (36a)$$

den Barwert der temporären Gesundenrente, so ergibt sich leicht die aus der Lebensversicherung bekannte Beziehung

$$\bar{a}^{gg}_{x+t} = \frac{l^{gg}(x)}{v^t \cdot l^{gg}(x+t)} \left[\bar{a}^{gg}_{x} - \bar{a}^{gg}_{x;\,\overline{t}|} \right] \qquad (47^*)$$

Wir haben nun noch die Integralgleichung (43b) zu lösen. Wenn wir den lösenden Kern einführen und daraufhin wiederum partiell integrieren, so resultiert die bereits eingangs direkt angesetzte Formel (35).

$$\bar{a}^{gg}_{x+t} = \frac{1}{v^t \cdot l^{gg}(x+t)} \int_t^{\infty} v^{\xi} \cdot l^{gg}(x+\xi) \cdot d\xi \qquad (35)$$

Bezeichnen wir noch mit

$${}_{t|}\bar{a}^{gg}_{x} = \frac{1}{v^t \cdot l^{gg}(x)} \int_t^{\infty} v^{\xi} \cdot l^{gg}(x+\xi) \cdot d\xi \qquad (36\,b)$$

den Barwert der aufgeschobenen Gesundenrente, so geht die letzte Formel über in die ebenfalls aus der Lebensversicherung bekannte Beziehung:

$$\bar{a}^{gg}_{x+t} = \frac{l^{gg}(x)}{l^{gg}(x+t)} \cdot {}_{t|}\bar{a}^{gg}_{x} \qquad (35^*)$$

Damit ist das methodische Vorgehen bei der indirekten Methode charakterisiert. Ein wesentliches Merkmal besteht also darin, dass sie die „retrospektive" und die „prospektive" Betrach-

tungsweise gleichzeitig umfasst, indem von einer gemeinschaftlichen Differentialgleichung ausgegangen wird.

Diese Methode ist in neuerer Zeit speziell von A. Berger [19] und E. Zwinggi [20], [21], in verschiedenen Untersuchungen angewendet und ausgebaut worden.

§ 3. Das Deckungskapital.

Nach der im vorigen Paragraphen dargelegten „indirekten" Methode können wir auch das Deckungskapital aus einer Differentialgleichung bestimmen. Die Höhe des Deckungskapitals hängt, wenn einmal über die Art und die Leistungen im einzelnen Krankheitsfalle bestimmte Bedingungen festgelegt worden sind, nur noch von den Sterblichkeits-, Erkrankungs- und Genesungsvorgängen innerhalb der versicherten Gesamtheit ab. Für unsere Untersuchung stellen wir die Versicherungsbedingungen folgendermassen zusammen:

a) Beim Eintritt in die Versicherung zahlt jeder ein vom Eintrittsalter x abhängiges Eintrittsgeld E_x.

b) Während der Zugehörigkeit zur Gesamtheit der Gesunden ist die jährliche Prämie P_x kontinuierlich zu entrichten.

c) Bei Eintritt eines Krankheitsfalles hat die Versicherungskasse im Durchschnitt einen vom Erkrankungsalter $(x + \lambda)$ abhängigen Betrag $U_{x+\lambda}$ zu bezahlen.

Wir berechnen das Deckungskapital für den ganzen Bestand $l(x+t)$ und bezeichnen den auf ein Mitglied entfallenden Durchschnittsbetrag für einen Zeitpunkt t Jahre nach Beginn der Versicherung, also die Einzelreserve, nach der in der Lebensversicherung gebräuchlichen Bezeichnungsweise mit $V_x(t)$ oder, wenn in bezug auf das Eintrittsalter keine Verwechslungen möglich sind, einfach mit $V(t)$.

Für die Aufstellung der Reservendifferentialgleichung sind für uns im wesentlichen die Ableitungen von E. Zwinggi [21] wegleitend, wie sie in der Arbeit „Zur Darstellung der Reserve in der Einzel- und in der Sozialversicherung" durchgeführt sind.

Nach Ablauf von t Jahren seit Beginn der Versicherung beträgt das Deckungskapital für den Gesamtbestand $l(x+t)$:

$$l(x+t) \cdot V(t)$$

in der Zeit t bis $t + dt$ wirft diese Summe den Zins ab:

$$l(x+t) \cdot V(t) \cdot \delta \cdot dt$$

Im gleichen Moment wird von der Kasse

$$\overline{P}_x \cdot l^{gg}(x+t) \cdot dt$$

an Prämien eingenommen und der Betrag

$$l^{gg}(x+t) \cdot \varepsilon^{g}(x+t) \cdot U_{x+t} \cdot dt$$

an Versicherungsleistungen dem Deckungskapital entnommen. Somit beträgt die totale Aenderung des Deckungskapitals in diesem Zeitmomente

$$\left[l(x+t) \cdot V(t) \cdot \delta + \overline{P}_x \cdot l^{gg}(x+t) - l^{gg}(x+t) \cdot \varepsilon^{g}(x+t) \cdot U_{x+t} \right] \cdot dt \tag{48}$$

Durch Differentiation des Produktes $l(x+t) \cdot V(t)$ erhalten wir anderseits für die Aenderung auch

$$l(x+t) \cdot d\,V(t) - l(x+t) \cdot \mu(x+t) \cdot V(t) \cdot dt \tag{49}$$

wo $\mu(x+t)$ die gewöhnliche Sterblichkeitsintensität bedeutet. Die Ausdrücke (48) und (49) setzen wir einander gleich, dividieren noch durch $l(x+t)$, führen die bekannte Substitution

$$\frac{l^{gg}(x+t)}{l(x+t)} = 1 - z(x+t)$$

ein und erhalten dann für die Einzelreserve die lineare Differentialgleichung I. Ordnung:

$$\frac{d\,V(t)}{dt} = \left(\mu(x+t) + \delta\right) \cdot V(t) + [1 - z(x+t)] \cdot \left[P_x - U_{x+t} \cdot \varepsilon^{g}(x+t) \right] \tag{50}$$

Die eigentliche Berechnung des Deckungskapitals verlangt nun bloss noch die Integration dieser Gleichung. Die Lösung ergibt sich nach Formel (40) im vorigen Paragraphen und hat, wenn man bedenkt, dass

$$e^{-\int_0^t (\mu(x+t)+\delta)\cdot dt} = \frac{v^t \cdot l(x+t)}{l(x)}$$

gesetzt werden muss, die Gestalt

$$V(t) = \frac{l(x)\cdot C}{v^t \cdot l(x+t)} + \frac{1}{v^t \cdot l(x+t)} \int_0^t v^\lambda \cdot l^{gg}(x+\lambda) \cdot \left[\overline{P}_x - U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda)\right] \cdot d\lambda \qquad (51)$$

Die Konstante C können wir auf zwei Arten bestimmen. Für $t = o$ wird

$$C_1 = V(o)$$

Die Konstante ist also gleich der Reserve zu Beginn der Versicherung. Diese besteht aber lediglich aus dem Eintrittsgeld. Somit können wir einsetzen

$$C_1 = \overline{E}_x$$

und bekommen für das Deckungskapital die *retrospektive* Darstellung:

$$V(t) = \frac{l(x)\cdot \overline{E}_x}{v^t \cdot l(x+t)} + \frac{1}{v^t \cdot l(x+t)} \int_0^t v^\lambda \cdot l^{gg}(x+\lambda) \cdot \left[P_x - U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda)\right] \cdot d\lambda \qquad (52)$$

Danach ist also das Deckungskapital gleich der aufgezinsten Anfangsreserve (Eintrittsgeld), vermehrt um die Summe der aufgezinsten Prämienzahlungen und vermindert um die Summe der aufgezinsten Versicherungsleistungen.

Eine andere Methode zur Bestimmung der Konstanten C ist die folgende: Nehmen wir an, die Versicherung sei abgeschlossen auf die Dauer von n Jahren, wobei n auch unendlich gross werden kann. Nun wird offenbar nach Ablauf der vorgesehenen Versiche-

rungsdauer die Reserve $V(n)$ sicher zu Null werden, da ja von seiten der Kasse zu diesem Zeitpunkte alle Verpflichtungen erfüllt sind und auch die Versicherten keine Beiträge mehr zahlen. Es wird auch

$$v^{\infty} = o \text{ und } l(\infty) = o$$

und aus (51) erhalten wir daher

$$C_2 = -\frac{1}{l(x)} \int_o^{\infty} v^{\lambda} \cdot l^{gg}(x+\lambda) \cdot \left[\bar{P}_x - U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^{g}(x+\lambda) \right] \cdot d\lambda \tag{53}$$

Führen wir dies selbst wieder in Gleichung (51) ein, so erhalten wir das Deckungskapital auch in *prospektiver* Darstellung, als Differenz zwischen dem Barwert der künftigen Versicherungsleistungen und dem Barwert der künftigen Prämieneinnahmen:

$$V(t) = \frac{1}{v^t \cdot l(x+t)} \int_t^{\infty} v^{\lambda} \cdot l^{gg}(x+\lambda) \cdot \left[U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^{g}(x+\lambda) - \bar{P}_x \right] \cdot d\lambda \tag{54}$$

Naturgemäss müssen der retrospektive und der prospektive Wert für $V(t)$ gleich sein. Diese Identität geht ohne weiteres schon daraus hervor, dass nach Gleichung (54)

$$V(o) = C_2 = \bar{E}_x$$

ist, und daher

$$C_1 = C_2$$

Die Gleichung (51) ist somit ein Ausdruck für das Deckungskapital, der sowohl die prospektive, wie auch die retrospektive Darstellung desselben in sich vereinigt.

An dieser Stelle möge nun noch kurz einiges ausgesagt werden über die Grenzen, in denen sich das Deckungskapital bewegt. Aus der Gleichung (50) erhalten wir die Bedingung für die Extremwerte, indem wir einfach setzen:

$$\frac{d\,V(t)}{dt} = o$$

Es ergibt sich so die Gleichung der Extremwertkurve des Deckungskapitals:

$$\text{Extr. } V(t) = \frac{[1 - z(x+t)] \cdot \left[U_{x+t} \cdot \varepsilon^{g}(x+t) - \overline{P}_x \right]}{\mu(x+t) + \delta}$$

Bevor wir diesen Ausdruck näher deuten können, müssen wir eine kurze Zwischenbetrachtung einschalten. Es stellt das Produkt

$$l^{gg}(x+t) \cdot \varepsilon^{g}(x+t) \cdot U_{x+t} \cdot dt$$

die Leistungen dar, die die Versicherungskasse in der Zeit von t bis $t + dt$ an die $(x+t)$-jährigen, soeben erkrankten Mitglieder zu entrichten hat. Im Durchschnitt macht das auf eine Person der ganzen Gesamtheit

$$\frac{l^{gg}(x+t)}{l(x+t)} \cdot \varepsilon^{g}(x+t) \cdot U_{x+t} \cdot dt = [1 - z(x+t)] \cdot \varepsilon^{g}(x+t) \cdot U_{x+t} \cdot dt$$

Dividieren wir noch durch das Zeitelement dt, so erhalten wir die durchschnittliche Jahresleistung der Kasse an die $(x+t)$-jährigen. Wir bezeichnen sie im folgenden der Kürze halber mit $j(x+t)$, also

$$j(x+t) = [1 - z(x+t)] \cdot \varepsilon^{g}(x+t) \cdot U_{x+t}$$

Führen wir diesen Begriff in die Gleichung der Extremwerte ein, so geht diese über in

$$\text{Extr. } V(t) = \frac{j(x+t) - [1 - z(x+t)] \cdot \overline{P}_x}{\mu(x+t) + \delta}$$

Da nun die Intensität der Sterblichkeit Werte zwischen Null und Unendlich annehmen kann und ferner $[1 - z(x+t)]$ zwischen 0 und 1 liegt, variieren die Extremwerte des Deckungskapitals, und damit das Deckungskapital selbst, zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{\delta} \cdot j(x+t)$. Es besteht also die folgende Ungleichung:

$$0 \leqq V(t) \leqq \frac{1}{\delta}\left(j(x+t) - [1 - z(x+t)] \cdot \overline{P}_x \right) \leqq \frac{1}{\delta} \cdot j(x+t) \tag{55}$$

Damit haben wir eigentlich die wichtigsten Eigenschaften des Deckungskapitals bereits geschildert. Doch wollen wir hier die Untersuchung noch nicht als abgeschlossen betrachten, sondern noch auf einige Punkte zu sprechen kommen, die besonders mathematisch interessant sind. Wir kehren zu diesem Zwecke wieder zurück zu unserer Reservendifferentialgleichung und lösen dieselbe, indem wir sie auf drei verschiedene Arten in eine Integralgleichung überführen.

Ein erstes mal schreiben wir die Differentialgleichung in einer etwas anderen Anordnung:

$$\frac{d\,V(t)}{dt} = \delta \cdot V(t) + \tag{56}$$
$$+ \left[\mu(x+t) \cdot V(t) + [1 - z(x+t)] \cdot \left[\overline{P}_x - U_{x+t} \cdot \varepsilon^g(x+t)\right]\right]$$

Diesen Ausdruck können wir wiederum als Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d\,y(t)}{dt} + \varphi(t) \cdot y(t) + f(t) = o$$

auffassen und daher nach Gleichung (40) des vorigen Paragraphen die Integration vornehmen. Wir erhalten auf diese Weise für das Deckungskapital die folgende Volterra'sche Integralgleichung II. Art:

$$V(t) = \frac{1}{v^t}\left[C + \int_o^t v^\lambda \cdot [1 - z(x+\lambda)] \cdot \left[\overline{P}_x - U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda)\right] \cdot d\lambda\right] +$$
$$+ \frac{1}{v^t}\int_o^t v^\lambda \cdot \mu(x+\lambda) \cdot V(\lambda) \cdot d\lambda \tag{57}$$

Je nachdem wir darin die Konstante C aus $V(o)$ oder aus $V(\infty) = o$ bestimmen, erhalten wir zwei neue Definitionsgleichungen für das Deckungskapital. Setzen wir einmal für $C = V(o) = \overline{E}_x$, so geht (57) über in:

$$V(t) = \frac{\bar{E}_x}{v^t} + \frac{1}{v^t}\int_0^t v^\lambda \left[1 - z(x+\lambda)\right] \cdot \left[\bar{P}_x - U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda)\right] \cdot d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{v^t}\int_0^t v^\lambda \cdot \mu(x+\lambda) \cdot V(\lambda) \cdot d\lambda \qquad (58)$$

Das bedeutet: Die Reserve ist gleich der aufgezinsten Anfangsreserve (Eintrittsgeld), vermehrt um die aufgezinsten Anteile an den Prämienüberschüssen über die Versicherungsleistungen und nochmals vermehrt um die aufgezinsten Erbanteile an den durch die Verstorbenen hinterlassenen Einzelreserven.

Bestimmen wir aber die Konstante auf die zweite Art und setzen

$$C = -\int_0^\infty v^\lambda \left[1 - z(x+\lambda)\right] \cdot \left[\bar{P}_x - U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda)\right] \cdot d\lambda +$$

$$+ \int_0^\infty v^\lambda \mu(x+\lambda) \cdot V(\lambda) \cdot d\lambda$$

so erhalten wir

$$V(t) = \frac{1}{v^t}\int_t^\infty v^\lambda \left[1 - z(x+\lambda)\right] \cdot \left[U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) - \bar{P}_x\right] \cdot d\lambda -$$

$$- \frac{1}{v^t}\int_t^\infty v^\lambda \cdot \mu(x+\lambda) \cdot V(\lambda) \cdot d\lambda \qquad (59)$$

Das heisst nun, dass die Einzelreserve gleich sein muss dem Barwert der Anteile an den künftigen Ausgabeüberschüssen, vermindert um den Barwert der künftigen Erbanteile.

Wir haben also wiederum eine retrospektive und eine prospektive Darstellung des Deckungskapitals erhalten. Beide Darstellungen sind in der Volterra'schen Integralgleichung (57) enthalten, welche den Kern besitzt:

$$K(\lambda, t) = v^{\lambda - t} \cdot \mu(x+\lambda)$$

Aus dem Kern berechnet sich nach bekannter Methode die Folge der iterierten Kerne. Sie sind allgemein von der Form

$$K^{(n)}(\lambda, t) = v^{\lambda - t} \cdot \mu(x+\lambda) \cdot \frac{1}{(n-1)!} \left[\operatorname{Log} \frac{l(x+\lambda)}{l(x+t)} \right]^{n-1}$$

und führen auf den lösenden Kern

$$S(\lambda, t; 1) = v^{\lambda - t} \cdot \mu(x+\lambda) \cdot \frac{l(x+\lambda)}{l(x+t)}$$

Damit erhalten wir als Lösung der Integralgleichung

$$V(t) = \frac{1}{v^t} \cdot \left[C + \int_0^t v^\lambda \left[1 - z(x+\lambda) \right] \cdot \left[\overline{P}_x - U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) \right] \cdot d\lambda \right]$$

$$+ \frac{1}{v^t \, l(x+t)} \int_0^t l(x+\lambda) \cdot \mu(x+\lambda) \left[C + \int_0^\lambda v^\xi \left[1 - z(x+\xi) \right] \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[\overline{P}_x - U_{x+\xi} \cdot \varepsilon^g(x+\xi) \right] \cdot d\xi \right] \cdot d\lambda$$

oder nach einiger Umformung

$$V(t) \quad \frac{l(x) \cdot C}{v^t \cdot l(x+t)} + \frac{1}{v^t} \int_0^t v^\lambda \cdot \left[1 - z(x+\lambda) \right] \cdot \left[\overline{P}_x - U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) \right] \cdot d\lambda$$

$$+ \frac{1}{v^t \, l(x+t)} \int_0^t d\lambda \int_0^\lambda v^\xi \left[1 - z(x+\xi) \right] \cdot \left[\overline{P}_x - U_{x+\xi} \cdot \varepsilon^g(x+\xi) \right] \cdot$$

$$\cdot \, l(x+\lambda) \cdot \mu(x+\lambda) \cdot d\xi \qquad (60)$$

Auf das Doppelintegral wenden wir den bereits früher erwähnten Dirichlet'schen Satz an und bekommen:

Doppelintegral =

$$\int_0^t v^{\xi}\left[1-z(x+\xi)\right]\cdot\left[\overline{P}_x - U_{x+\xi}\cdot\varepsilon^{g}(x+\xi)\right]\cdot\int_{\xi}^{t} l(x+\lambda)\cdot\mu(x+\lambda)\cdot d\lambda\cdot d\xi$$

$$\int_0^t v^{\xi}\left[1-z(x+\xi)\right]\cdot\left[\overline{P}_x - U_{x+\xi}\cdot\varepsilon^{g}(x+\xi)\right]\cdot\left[l(x+\xi) - l(x+t)\right]\cdot d\xi$$

Führen wir dies in (60) ein, so erhalten wir als Lösung der Integralgleichung ohne weiteres wieder den Ausdruck (51).

Zwei weitere Definitionsgleichungen des Deckungskapitals erhalten wir ferner, indem wir die Reservendifferentialgleichung in der Anordnung schreiben

$$\frac{dV(t)}{dt} = \mu(x+t)\cdot V(t) + \tag{61}$$
$$+\left[\delta\cdot V(t) + \left[1-z(x+t)\right]\cdot\left[\overline{P}_x - U_{x+t}\cdot\varepsilon^{g}(x+t)\right]\right]$$

und die Integration nach der Formel (40) durchführen. Wir erhalten abermals eine Volterra'sche Integralgleichung II. Art für die Einzelreserve:

$$V(t) = \frac{l(x)\cdot C}{l(x+t)} + \frac{1}{l(x+t)}\int_0^t l^{gg}(x+\lambda)\left[\overline{P}_x - U_{x+\lambda}\cdot\varepsilon^{g}(x+\lambda)\right]\cdot d\lambda$$
$$+\frac{1}{l(x+t)}\int_0^t l(x+\lambda)\cdot V(\lambda)\cdot\delta\cdot d\lambda$$

Betrachten wir nun an Stelle der Einzelreserve die Gesamtreserve als das Gesuchte, führen vorübergehend die Bezeichnung *)

$$R_x(t) = l(x+t)\cdot V(t)$$

ein und schreiben noch statt $l(x)\cdot C$ einfach C^1, so nimmt die Gleichung auch folgende Gestalt an:

*) Nicht mit dem Reduktionsfaktor zu verwechseln.

$$R_x(t) = C^1 + \int_0^t l^{gg}(x+\lambda) \cdot \left[\overline{P}_x - U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) \right] \cdot d\lambda + \\ + \int_0^t \delta \cdot R_x(\lambda) \cdot d\lambda \tag{62}$$

Indem wir für $C^1 = R_x(o)$ setzen, erhalten wir die erste neue Definitionsgleichung:

$$R_x(t) = R_x(o) + \int_0^t l^{gg}(x+\lambda) \left[\overline{P}_x - U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) \right] \cdot d\lambda + \\ + \int_0^t \delta \cdot R_x(\lambda) \cdot d\lambda \tag{63}$$

Daraus lesen wir ab, dass das totale Deckungskapital t Jahre nach Beginn der Versicherung sich zusammensetzt aus dem Deckungskapital am Anfange, den sämtlichen in der Vergangenheit gemachten Prämienüberschüssen $l^{gg}(x+\lambda) \cdot \left[\overline{P}_x - U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) \right]$ und ferner aus der Summe aller in der gleichen Zeit gemachten Zinserträgnisse. Dies ist wieder eine retrospektive Deutung des Deckungskapitals.

Die entsprechende prospektive Darstellung ergibt sich, wenn für

$$C^1 = -\int_0^\infty l^{gg}(x+\lambda) \cdot \left[\overline{P}_x - U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) \right] d\lambda - \int_0^\infty \delta \cdot R_x(\lambda) \cdot d\lambda$$

gesetzt wird. Sie hat die Form:

$$R_x(t) = \int_t^\infty l^{gg}(x+\lambda) \left[U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) - \overline{P}_x \right] \cdot d\lambda - \int_t^\infty \delta \cdot R_x(\lambda) \cdot d\lambda \tag{64}$$

Nach dieser Definition ist also das Deckungskapital gleich der Summe aller künftigen durch die Versicherungsleistungen verursachten Ausgabeüberschüsse über die Prämieneinnahmen, vermindert um die Summe der künftigen Zinsen, die das Deckungskapital selbst abwirft.

Es ist nun ganz natürlich, dass sich die Integralgleichung (62) ebenfalls überführen lässt in den Ausdruck (51). Zu dem Kern

$$K(\lambda, t) = \delta$$

gehören nämlich die iterierten Kerne von der allgemeinen Form

$$K^{(n)}(\lambda, t) = \delta^n \cdot \frac{(t-\lambda)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Aus diesen berechnet sich der lösende Kern zu:

$$S(\lambda, t; 1) = \delta \cdot v^{\lambda - t}$$

Führen wir damit die Lösung der Integralgleichung durch, so erhalten wir für die Gesamtreserve

$$R_x(t) = \frac{C^1}{v^t} + \frac{1}{v^t} \int_0^t v^\lambda \cdot l^{gg}(x+\lambda) \cdot \left[\overline{P}_x - U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) \right] \cdot d\lambda$$

Dieser Ausdruck ist vollkommen identisch mit der Gleichung (51), da wir ja $R_x(t) = l(x+t) \cdot V(t)$ und $C^1 = l(x) \cdot C$ gesetzt haben.

Schliesslich erhalten wir nochmals zwei Definitionsgleichungen für die Reserve, wenn wir die Reservendifferentialgleichung gliedweise integrieren. Einmal erhalten wir

$$V(t) = V(o) + \int_0^t \left[1 - z(x+\lambda)\right] \cdot \left[\overline{P}_x - U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) \right] \cdot d\lambda + \\ + \int_0^t \left[\mu(x+\lambda) + \delta\right] \cdot V(\lambda) \cdot d\lambda \qquad (65)$$

Das bedeutet: Die Einzelreserve nach der Zeit t ist gleich der Anfangsreserve, vermehrt um die Summe aller Anteile an den Prämienüberschüssen, die Erbschaften und den Zinsenertrag.

Wenn wir die Reservendifferentialgleichung zwischen den Grenzen t und ∞ gliedweise integrieren, so erhalten wir:

$$V(t) = \int_t^{\infty} [1 - z(x+\lambda)] \cdot \left[U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) - \bar{P}_x \right] \cdot d\lambda - \\ - \int_t^{\infty} [\mu(x+\lambda) + \delta] \cdot V(\lambda) \cdot d\lambda \qquad (66)$$

Danach ist die Einzelreserve gleich der Summe aller Anteile an den künftigen Ausgabeüberschüssen, vermindert um die künftigen Erbschaften und die künftigen Zinserträge.

Durch eine einfache Ueberprüfung lässt sich feststellen, dass die beiden Formeln (65) und (66) sich in eine einzige zusammenfassen lassen. Diese lautet:

$$V(t) = C + \int_0^t [1 - z(x+\lambda)] \cdot \left[\bar{P}_x - U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) \right] \cdot d\lambda + \\ + \int_0^t [\mu(x+\lambda) + \delta] \cdot V(\lambda) \cdot d\lambda \qquad (67)$$

Dies ist wiederum eine Volterra'sche Integralgleichung II. Art. Ihr Kern heisst:

$$K(\lambda, t) = \mu(x+\lambda) + \delta$$

Dazu gehören die iterierten Kerne von der allgemeinen Form:

$$K^{(n)}(\lambda, t) = [\mu(x+\lambda) + \delta] \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left[\delta \cdot [t-\lambda] + \operatorname{Log} \frac{l(x+\lambda)}{l(x+t)} \right]^{n-1}$$

und hieraus errechnet sich der lösende Kern zu:

$$S(\lambda, t; 1) = v^{\lambda - t} [\mu(x+\lambda) + \delta] \cdot \frac{l(x+\lambda)}{l(x+t)}$$

Damit lässt sich die Integralgleichung (67) ohne Schwierigkeiten wieder überführen in den Ausdruck (51).

Hier können wir unsere Betrachtungen über das Deckungskapital abschliessen. Wir haben gesehen, wie fruchtbringend die „indirekte Methode" bei kontinuierlicher Behandlungsweise sein kann. Statt der üblichen prospektiven und retrospektiven Definition haben wir noch je drei prospektive und drei retrospektive Darstellungen des Deckungskapitals erhalten, die das Wesen dieses so wichtigen versicherungstechnischen Begriffes auf ganz andere Weise erklären. Dabei sind wir zu unseren Resultaten durch relativ einfache mathematische Operationen gelangt, stets wieder ausgehend von der eingangs abgeleiteten Reservendifferentialgleichung.

§ 4. Die Anwartschaft.

Die formelmässige Darstellung der Anwartschaft eines versicherten Mitgliedes auf künftige Versicherungsleistungen erhalten wir ohne weiteres aus den Formeln für das Deckungskapital, indem wir darin die Jahresprämie P_x zu Null werden lassen. Die Anwartschaft eines $(x+t)$-jährigen, lebenslänglich versicherten Mitgliedes bezeichnen wir mit $\bar{A}^{lk}_{x+t}$.

Setzen wir in der Reservendifferentialgleichung (50) die Prämie $P_x = o$, so degeneriert diese zur Differentialgleichung der Anwartschaft.

$$\frac{d\,\bar{A}^{lk}_{x+t}}{dt} = [\mu(x+t) + \delta] \cdot \bar{A}^{lk}_{x+t} + [1 - z(x+t)[\cdot U_{x+t} \cdot \varepsilon^{g}(x+t) \quad (69)$$

Die Anwartschaft erfüllt also eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, welche genau gleich gebaut ist wie diejenige für den gewöhnlichen Leibrentenbarwert, nur dass an Stelle der Jahresleistung 1 die Jahresleistung $j(x+t) = [1 - z(x+t)] \cdot U_{x+t} \cdot \varepsilon^{g}(x+t)$ steht.

Die Integration des vorstehenden Ausdruckes führt uns auf die verschiedenen Definitionsgleichungen für die Anwartschaft. Wir können uns aber die Durchführung der Rechnung ersparen, indem wir direkt von den Definitionsgleichungen des Deckungskapitals ausgehen und $\bar{P}_x = o$ einsetzen.

Einmal erhalten wir auf diese Weise aus der Formel (61) die allgemeine Darstellung:

$$\bar{A}^{lk}_{x+t} = \frac{l(x) \cdot C}{v^t \cdot l(x+t)} - \frac{1}{v^t \cdot l(x+t)} \int_o^t v^\lambda \cdot l^{gg}(x+\lambda) \cdot U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) \cdot d\lambda \tag{70}$$

Setzen wir $t = o$, so wird $C = A^{lk}_x$ und wir erhalten einen retrospektiven Ausdruck für die Anwartschaft.

$$\bar{A}^{lk}_{x+t} = \frac{l(x) \cdot \bar{A}^{lk}_x}{v^t \cdot l(x+t)} - \frac{1}{v^t \cdot l(x+t)} \int_o^t v^\lambda \cdot l^{gg}(x+\lambda) \cdot U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) \cdot d\lambda \tag{71}$$

Setzen wir aber $t = \infty$ und $A^{lk}_\infty = o$, so wird

$$C = \frac{1}{l(x)} \cdot \int_o^\infty v^\lambda \cdot l^{gg}(x+\lambda) \cdot U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) \cdot d\lambda$$

und wir erhalten einen prospektiven Ausdruck für die Anwartschaft:

$$\bar{A}^{lk}_{x+t} = \frac{1}{v^t \cdot l(x+t)} \int_t^\infty v^\lambda \cdot l^{gg}(x+\lambda) \cdot U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) \cdot d\lambda \tag{72}$$

Wenn wir noch die Substitution machen,

$$\lambda - t = \xi$$
$$d\lambda = d\xi$$

Grenzen

λ	ξ
t	o
∞	∞

so geht der letzte Ausdruck über in den folgenden:

$$\bar{A}^{lk}_{x+t} = \frac{1}{l(x+t)} \int_o^\infty v^\xi \cdot l^{gg}(x+t+\xi) \cdot U_{x+t+\xi} \cdot \varepsilon^g(x+t+\xi) \cdot d\xi \tag{73}$$

Für $t = o$ wird speziell:

$$\bar{A}^{lk}_{x} = \frac{1}{l(x)} \int_{o}^{\infty} v^{\xi} \cdot l^{gg}(x+\xi) \cdot U_{x+\xi} \cdot \varepsilon^{g}(x+\xi) \cdot d\xi \tag{73*}$$

Dies ist die gewöhnliche Darstellung der Anwartschaft. Sie sagt uns, dass diese Rechnungsgrösse den Wert der Versicherung in einem bestimmten Alter wiedergibt, da sie definiert ist als Barwert aller künftigen Versicherungsleistungen. Selbstverständlich führen aber auch hier die prospektive und die retrospektive Betrachtungsweise auf dasselbe rechnerische Resultat.

Aus (73*) lassen sich ohne Schwierigkeiten die Formeln für die Anwartschaft bei temporärer und bei aufgeschobener Krankenversicherung ablesen. Für die *temporäre* Versicherung ist

$$\bar{A}^{lk}_{x;\,\overline{n}|} = \frac{1}{l(x)} \int_{o}^{n} v^{\xi} \cdot l^{gg}(x+\xi) \cdot U_{x+\xi} \cdot \varepsilon^{g}(x+\xi) \cdot d\xi \tag{74}$$

und für die *aufgeschobene* Versicherung

$${}_{n}\bar{A}^{lk}_{x} = \frac{1}{v^{n} \cdot l(x)} \int_{n}^{\infty} v^{\xi} \cdot l^{gg}(x+\xi) \cdot U_{x+\xi} \cdot \varepsilon^{g}(x+\xi) \cdot d\xi \tag{75}$$

Wenn wir von diesen zwei neuen Ausdrücken gleich Gebrauch machen und sie in den Gleichungen (71) und (72) einführen, so erhalten wir daraus:

$$\bar{A}^{lk}_{x+t} = \frac{l(x)}{v^{t} \cdot l(x+t)} \left[\bar{A}^{lk}_{x} - \bar{A}^{lk}_{x;\,\overline{t}|} \right] \tag{71*}$$

beziehungsweise

$$\bar{A}^{lk}_{x+t} = \frac{l(x)}{l(x+t)} \cdot {}_{t|}\bar{A}^{lk}_{x} \tag{72*}$$

Dies sind zwei Beziehungen, die uns von der Lebensversicherung her bereits wohlbekannt sind.

Da wir die Anwartschaft ja nur als einen Spezialfall des Deckungskapitals betrachten, können wir sie natürlich auch ohne weiteres durch Integralgleichungen darstellen. Zu diesem Zwecke haben wir entweder die Differentialgleichung (69) in entsprechend anderer Zusammenfassung zu integrieren oder einfach in den Integralgleichungen für das Deckungskapital $\bar{P}_x = o$ zu setzen und $\bar{A}^{lk}_{x+t}$ an Stelle von $V(t)$ zu schreiben. Die den Ausdrücken (57), (62) und (67) entsprechenden Integralgleichungen lauten dann der Reihe nach:

$$\bar{A}^{lk}_{x+t} = \frac{1}{v^t}\left[C - \int_o^t v^\lambda \,[1 - z\,(x+\lambda)] \cdot U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) \cdot d\lambda\right] + \\ + \frac{1}{v^t} \cdot \int_o^t v^\lambda \cdot \mu\,(x+\lambda) \cdot \bar{A}^{lk}_{x+\lambda} \cdot d\lambda \qquad (76)$$

$$\bar{A}^{lk}_{x+t} = \frac{1}{l(x+t)}\left[l(x) \cdot C - \int_o^t l^{gg}(x+\lambda) \cdot U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) \cdot d\lambda\right] + \\ + \frac{1}{l(x+t)} \int_o^t \delta \cdot l(x+\lambda) \cdot \bar{A}^{lk}_{x+\lambda} \cdot d\lambda \qquad (77)$$

$$\bar{A}^{lk}_{x+t} = C - \int_o^t [1 - z(x+\lambda)] \cdot U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) \cdot d\lambda + \int_o^t [\mu(x+\lambda) + \delta] \\ \cdot \bar{A}^{lk}_{x+\lambda} \cdot d\lambda \qquad (78)$$

Die Bestimmung der Konstanten C in diesen drei Gleichungen geschieht auf die übliche Weise, entweder prospektiv $(t = \infty)$ oder retrospektiv $(t = o)$. Zur Deutung der Formeln können wir aber von der Konstanten überall absehen. In (76) ist die Anwartschaft eines $(x + t)$-jährigen dargestellt durch die sum-

mierten Barwerte der Kostenanteile in jedem Zeitpunkte, $\frac{l^{gg}(x+\lambda)}{l(x+\lambda)} \cdot$ $\cdot U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^{g}(x+\lambda) \cdot d\lambda$, und durch die Anwartschaften, welche infolge Wegsterbens der Mitglieder frei werden, also wiederum durch eine Erbschaft. In (77) dagegen ist die Anwartschaft eines $(x+t)$-jährigen wiedergegeben durch die Summe der Versicherungsleistungen und die Zinserträgnisse. Die Gleichung (78) schliesslich drückt zusammenfassend das aus, was in den Gleichungen (76) und (77) einzeln gesagt ist.

Die drei vorstehenden Gleichungen lassen sich, da sie ja die gleichen Kerne $K(\lambda, t)$ und somit auch die gleichen lösenden Kerne $S(\lambda, t; 1)$ besitzen, wie (57), (62) und (67), leicht auflösen und geben als Resultat den Ausdruck (70).

Zum Schluss sei noch kurz etwas ausgesagt über die Grenzen, in denen sich die Werte von $\bar{A}^{lk}_{x+t}$ bewegen. Die Differentialgleichung für die Anwartschaft lieferte uns, wenn wir $\frac{d\bar{A}^{lk}_{x+t}}{dt} = o$ setzen, für die Kurve der Extremwerte die Gleichung:

$$\text{Extr. } \bar{A}^{lk}_{x+t} = \frac{[1 - z(x+t)] \cdot U_{x+t} \cdot \varepsilon^{g}(x+\lambda)}{\mu(x+t) + \delta} = \frac{j(x+t)}{\mu(x+t) + \delta}$$

Da nun $\mu(x+t)$ sich in den Grenzen o und ∞ bewegt, können wir daraus sofort die Ungleichung ablesen:

$$0 \leqq \bar{A}^{lk}_{x+t} \leqq \frac{j(x+t)}{\delta}$$

§ 5. Jahresprämie und Eintrittsgeld.

Zur Bestimmung der konstanten Jahresprämie gehen wir aus von der prospektiven Formel für das Deckungskapital und schreiben

$$V(o) = \bar{E}_x = \frac{1}{l(x)} \int_o^{\infty} v^{\lambda} \cdot l^{gg}(x+\lambda) \cdot U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^{g}(x+\lambda) \cdot d\lambda -$$

$$- \frac{\bar{P}_x}{l(x)} \int_o^{\infty} v^{\lambda} \cdot l^{gg}(x+\lambda) \cdot d\lambda$$

Hieraus erhalten wir:

$$\bar{P}_x \cdot \frac{1}{l(x)} \int_0^\infty v^\lambda \cdot l^{gg}(x+\lambda) \cdot d\lambda + \bar{E}_x = \frac{1}{l(x)} \int_0^\infty v^\lambda \cdot l^{gg}(x+\lambda) \cdot \\ \cdot U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) \cdot d\lambda \tag{79}$$

Wenn wir nach (35) und (72) den Barwert der Gesundenrente und die Anwartschaft einführen, so erhalten wir eine Gleichgewichtsbedingung zwischen den vier Grössen $\bar{P}_x$, $\bar{a}_x^{gg}$, $\bar{E}_x$ und $\bar{A}_x^{lk}$.

$$\bar{E}_x + \bar{P}_x \cdot \bar{a}_x^{gg} = \bar{A}_x^{lk} \tag{79*}$$

Den Inhalt dieser Gleichung können wir in Worten folgendermassen wiedergeben: In der privaten Versicherung muss für den einzelnen Versicherten das Eintrittsgeld plus die Summe der diskontierten Jahresbeiträge gleich sein dem Barwert der Versicherungsleistungen. Sie drückt also gerade das Prinzip der Gleichheit der Leistungen und Gegenleistungen aus, welches allgemein in der privaten Versicherung gilt.

Werden vom Versicherten keine Jahresbeiträge erhoben, ist also $\bar{P}_x = o$, so wird

$$\bar{E}_x = \bar{A}_x^{lk}$$

Die Einmaleinlage muss in diesem Falle gleich sein der Anwartschaft.

Wird umgekehrt beim Eintritt in die Versicherung kein Eintrittsgeld erhoben, ist also $\bar{E}_x = o$, so ergibt sich aus (79*) der bekannte Ausdruck für die Jahresprämie im eigentlichen Sinne.

$$\bar{P}_x \cdot \bar{a}_x^{gg} = \bar{A}_x^{lk} \tag{80}$$

oder

$$\bar{P}_x = \frac{\bar{A}_x^{lk}}{\bar{a}_x^{gg}}$$

Wird nun statt der richtig berechneten Jahresprämie $\overline{P}_x$ ein jährlicher Beitrag $\overline{P} \gtrless \overline{P}_x$ erhoben, so stimmt natürlich die Gleichgewichtsbedingung (80) nicht mehr. Wir haben dann:

$$\overline{P} \cdot \bar{a}_x^{gg} = \overline{A}_x^{lk} + g_x \tag{81}$$

Die Grösse g_x bezeichnet dann einen „Gewinn", den die Kasse beim Eintritt eines Mitgliedes macht. Man nennt dies den Eintrittsgewinn. Er kann positiv oder negativ sein, je nachdem $\overline{P} \gtrless \overline{P}_x$ ist. Nur wenn $\overline{P} = \overline{P}_x$ ist, wird $g_x = o$. Subtrahieren wir die Gleichung (80) von (81), so erhalten wir

$$g_x = (\overline{P} - \overline{P}_x) \cdot \bar{a}_x^{gg} \tag{81*}$$

Der Eintrittsgewinn ist also gleich dem Barwert der Prämiendifferenz.

§ 6. Die Umlage.

Es ist auch der Fall denkbar, wo eine Krankenkasse auf die Ansammlung einer Reserve verzichtet. Es fragt sich, was das für die Beitragszahlung zur Folge hat. Setzen wir $V(t) = o$, so ist auch $\frac{d\,V(t)}{dt} = o$ und aus der Reservendifferentialgleichung folgt:

$$\overline{P}^u(x+t) = U_{x+t} \cdot \varepsilon^g(x+t) \tag{82}$$

Der jährlich zahlbare Beitrag bleibt also nicht mehr konstant, sondern ändert sich mit den Durchschnittsleistungen U_{x+t} und der Erkrankungsintensität $\varepsilon^g(x+t)$. Statt einer konstanten Prämie $\overline{P}_x$ muss ein sogenannter Umlagebeitrag $\overline{P}^u(x+t)$ entrichtet werden. Da nun mit zunehmendem Alter die Krankheiten im allgemeinen länger dauern und daher grössere Kosten verursachen, werden die Leistungen U_{x+t} offenbar immer grösser. Ferner wächst die Erkrankungsintensität auch mit zunehmendem Alter. Diese beiden Tatsachen haben zur Folge, dass auch der Umlagebeitrag mit zunehmendem Alter wächst. Der Versicherte muss für die gleiche Versicherung im gesamten mehr bezahlen.

In jedem Zeitpunkte beträgt die Differenz zwischen der Umlage und der gewöhnlichen Jahresprämie

$$\overline{P}^{u}(x+\lambda) - \overline{P}_x = U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^{g}(x+\lambda) - \overline{P}_x$$

In jedem Zeitmomente $d\lambda$ wird also von $l^{gg}(x+\lambda)$ Gesunden eine Mehrzahlung von

$$l^{gg}(x+\lambda)\left(\overline{P}^{u}(x+\lambda) - \overline{P}_x\right) d\lambda = l^{gg}(x+\lambda) \cdot \cdot \left[U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^{g}(x+\lambda) - \overline{P}_x\right] \cdot d\lambda$$

geleistet. Auf das einzelne Mitglied macht das

$$\frac{l^{gg}(x+\lambda)}{l(x+\lambda)}\left(\overline{P}^{u}(x+\lambda) - \overline{P}_x\right) \cdot d\lambda = \frac{l^{gg}(x+\lambda)}{l(x+\lambda)} \cdot \cdot \left[U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^{g}(x+\lambda) - \overline{P}_x\right] \cdot d\lambda$$

Für $\frac{l^{gg}(x+\lambda)}{l(x+\lambda)}$ schreiben wir wiederum $[1 - z(x+\lambda)]$. Integrieren wir nun über λ zwischen den Grenzen o und ∞, so erhalten wir den Betrag, der von der Kasse während der Dauer der Versicherung insgesamt mehr eingefordert werden muss bei Anwendung des Umlageverfahrens.

$$\int_o^\infty [1 - z(x+\lambda)] \cdot \left[\overline{P}^{u}(x+\lambda) - \overline{P}_x\right] \cdot d\lambda = \int_o^\infty [1 - z(x+\lambda)] \cdot \cdot \left[U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^{g}(x+\lambda) - \overline{P}_x\right] d\lambda \qquad (83)$$

Nun haben wir früher für das Deckungskapitel die Integralgleichung gefunden:

$$V(t) = \int_t^\infty [1 - z(x+\lambda)] \cdot \left[U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) - \bar{P}_x \right] \cdot d\lambda -$$

$$- \int_t^\infty [\mu(x+\lambda) + \delta] \cdot V(\lambda) \cdot d\lambda \qquad (66)$$

Für $t = o$ erhalten wir daraus $V(o)$. Wird nun die eigentliche richtige Jahresprämie $\bar{P}_x$ erhoben, so wird, wie wir gesehen haben $V(o) = \bar{E}_x = o$. Es ist dann

$$\int_o^\infty [1 - z(x+\lambda)] \cdot \left[U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) - \bar{P}_x \right] \cdot d\lambda = \int_o^\infty [\mu(x+\lambda) + \delta] \cdot$$

$$\cdot V(\lambda) \cdot d\lambda \qquad (84)$$

Nun sehen wir, dass das Integral linker Hand gerade mit unserem Ausdruck (83) übereinstimmt. Die Gleichung (84) besagt also, dass beim Umlageverfahren von der versicherten Gesamtheit ein Mehrbetrag eingefordert werden muss, der sich bei Anwendung des Prämienverfahrens ergibt durch die Summe aller ererbten Reserven und die Zinserträgnisse.

Kapitel III.

Die soziale Krankenversicherung.

Die soziale Krankenversicherung unterscheidet sich von der privaten im wesentlichen durch das Zustandekommen des Versicherungsverhältnisses. Während in der privaten Versicherung eine Person nach freiem Ermessen Mitglied einer Kasse werden kann, besteht in der sozialen Krankenversicherung ein Zwang zur Mitgliedschaft.

Dies erlaubt einer solchen Kasse, die Leistungen und Gegenleistungen nach anderen Grundsätzen zu berechnen, als es in der privaten Versicherung üblich ist. Einmal hat es grosse verwaltungstechnische Vereinfachungen zur Folge, wenn die Versicherten

alle oder gruppenweise die gleiche Prämie bezahlen, die sogenannte Durchschnittsprämie, welche nicht vom Alter des einzelnen direkt abhängig ist. Das hat aber zur Folge, dass nicht mehr das einzelne Individuum, sondern eine ganze Personengruppe oder gar der gesamte Versicherungsbestand als Einheit vor der Kasse steht, der gegenüber sie das Prinzip der Gleichheit von Leistungen und Gegenleistungen zur Geltung zu bringen hat.

§ 1. Geschlossene und offene Bestände. Prinzipielles über die Berechnung des Durchschnittsbeitrages.

Ein geschlossener Bestand ist ein solcher, bei dem in der Zukunft keine Neueintritte stattfinden. Seine Grösse nimmt, da die Mitglieder der Sterblichkeit unterworfen sind, mit der Zeit ab. Ist $B(o)$ der Bestand beim Eintritt in die Versicherung, und gibt uns die Funktion $\alpha(x)$ die Altersverteilung in diesem Bestande an, wobei, mit x_0 als unterer und ω als oberer Altersgrenze,

$$\int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot dx = 1$$

gelten soll, so kann der Bestand nach t Jahren dargestellt werden durch

$$B(t) = B(o) \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(t) \cdot dx \qquad (85)$$

Darin bedeutet $p_x(t)$ die t-jährige Ueberlebenswahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person.

Wir haben bereits bemerkt, dass in einem solchen Bestande das Prinzip der Gleichheit der Leistungen und Gegenleistungen der ganzen Gesamtheit gegenüber zur Geltung kommen müsse. Der Barwert der Leistungen zu Beginn der Versicherung stellt sich dar durch die Summe der einzelnen Anwartschaften

$$B(o) \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot \bar{A}_x^{lk} \cdot dx$$

Diesem steht der Barwert aller Gegenleistungen durch die Versicherten gegenüber:

$$B(o) \cdot \bar{P}_{\mathcal{J}} \cdot \int_{x_0}^{\omega} a(x) \cdot \bar{a}_x^{gg} \cdot dx$$

Hierin bedeutet $\bar{P}_{\mathcal{J}}$ die für alle Mitglieder gleiche Durchschnittsprämie. Es besteht nun wegen (81) die Beziehung

$$B(o) \cdot P_{\mathcal{J}} \cdot \int_{x_0}^{\omega} a(x) \cdot \bar{a}_x^{gg} \cdot dx = B(o) \cdot \int_{x_0}^{\omega} a(x) \cdot \bar{A}_x^{lk} \cdot dx +$$

$$+ B(o) \cdot \int_{x_0}^{\omega} a(x) \cdot g_x \cdot dx$$

Das Integral

$$B(o) \int_{x_0}^{\omega} a(x) \cdot g_x \cdot dx$$

stellt uns die Summe aller (positiven und negativen) Eintrittsgewinne dar. Da aber weder zu gunsten der einen noch der andern Partei ein derartiger Gewinn gemacht werden darf, muss das Integral zu Null werden. Dies ist die Bedingung für die richtige Bestimmung der Durchschnittsprämie, welche sich nun nach der Formel berechnet:

$$P_{\mathcal{J}} = \frac{\int_{x_0}^{\omega} a(x) \cdot \bar{A}_x^{lk} \cdot dx}{\int_{x_0}^{\omega} a(x) \cdot \bar{a}_x^{gg} \cdot dx} \qquad (86)$$

Indem wir in einer geschlossenen Gesamtheit Durchschnittsprämien verlangen, nehmen wir eine Verteilung der Lasten in der Weise vor, dass die jüngeren und günstigeren Risiken die andern entlasten. Darin liegt zu einem grossen Teil der soziale

Charakter einer solchen Kasse. Die zu zahlende Prämie ist nicht vom Alter, sondern von der Altersverteilung abhängig.

Haben wir nun einen Personenbestand vor uns, bei dem in der Zukunft noch Neueintritte stattfinden können, so nennen wir das einen *offenen* Bestand. Da im allgemeinen die Alterszusammensetzung bei den Neueintretenden nicht die gleiche ist wie beim Anfangsbestand, wird hier die stets gleichbleibende Durchschnittsprämie auch von den Neueintritten abhängig sein. Der Berechnungsmodus bleibt aber im Prinzip derselbe: Der Barwert der Beiträge aller jemals in der unbegrenzten Zukunft durch die Versicherung hindurchgehenden Versicherten und der Barwert aller ebenfalls für die ewige Dauer geschätzten Kassenleistungen müssen einander gleich sein. Das Prinzip der Gleichheit von Leistungen und Gegenleistungen wird also hier gegenüber allen in der unbegrenzten Zukunft zu gewärtigenden Kassenmitgliedern in Anwendung gebracht. Dies setzt aber die Kenntnis der Bestandesentwicklung voraus.

Wir bezeichnen mit $H(o)$ den Bestand am Anfang und mit $H(t)$ den Bestand nach t Jahren Kassentätigkeit. Die Altersverteilung, welche hier auch von der Zeit des Eintrittes abhängig ist, sei gegeben durch die Funktion $\alpha(x, \tau)$, wobei wiederum

$$\int_{x_0}^{\omega} \alpha(x, \tau) \cdot dx = 1$$

sein soll. Ferner definieren wir die Intensität der Erneuerung $\varphi(\tau)$ so, dass durch

$$H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot d\tau$$

die Zahl der Neueintritte in dem Zeitintervall τ bis $\tau + d\tau$ dargestellt wird. Wenn wir diese Grösse als bekannt ansehen, so berechnet sich der Bestand nach t Jahren Kassentätigkeit nach der bekannten Moser'schen Gleichung [22] [23]

$$H(t) = H(o) \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x, o) \cdot p_x(t) \cdot dx + \int_{o}^{t} H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x, \tau) \cdot \cdot p_x(t-\tau) \cdot dx \cdot d\tau \qquad (87)$$

In einer offenen Gesamtheit wird der Barwert der Versicherungsleistungen dargestellt durch den Barwert aller individuellen Anwartschaften

$$H(o) \cdot \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x, o) \cdot \bar{A}_x^{lk} \cdot dx + \int_{o}^{\infty} H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot v^{\tau} \cdot \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x, \tau) \cdot \bar{A}_x^{lk} \cdot dx \cdot d\tau$$

Diesem steht der Barwert aller künftigen Prämienleistungen gegenüber, wobei vorausgesetzt sei, dass in der ganzen unbegrenzten Zukunft alle Mitglieder die immer gleichbleibende Durchschnittsprämie $\bar{P}_{\Delta\Delta}$ bezahlen:

$$\bar{P}_{\Delta\Delta}\left[H(o) \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x, o) \cdot \bar{a}_x^{gg} \cdot dx + \int_{o}^{\infty} H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot v^{\tau} \cdot \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x, \tau) \cdot \bar{a}_x^{gg} \cdot dx \cdot d\tau\right]$$

Berücksichtigen wir auch hier wiederum die Gleichung (81), so erhalten wir die Beziehung:

$$\bar{P}_{\Delta\Delta}\left[H(o) \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x, o) \cdot \bar{a}_x^{gg} \cdot dx + \int_{o}^{\infty} H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot v^{\tau} \cdot \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x, \tau) \cdot \bar{a}_x^{gg} \cdot dx \cdot d\tau\right] =$$

$$= H(o) \cdot \int_{x_0}^{\omega} a(x, o) \cdot \bar{A}_x^{lk} \cdot dx + \int_{0}^{\infty} H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot v^{\tau} \cdot$$

$$\cdot \int_{x_0}^{\omega} a(x, \tau) \cdot \bar{A}_x^{lk} \cdot dx \cdot d\tau$$

$$+ H(o) \int_{x_0}^{\omega} a(x, o) \cdot g_x \cdot dx + \int_{0}^{\infty} H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot v^{\tau} \cdot$$

$$\cdot \int_{x_0}^{\omega} a(x, \tau) \cdot g_x \cdot dx \cdot d\tau$$

Darin stellt uns der Ausdruck

$$H(o) \cdot \int_{x_0}^{\omega} a(x, o) \cdot g_x \cdot dx + \int_{0}^{\infty} H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot v^{\tau} \cdot$$

$$\cdot \int_{x_0}^{\omega} a(x, \tau) \cdot g_x \cdot dx \cdot d\tau$$

den Barwert aller jemals zu machenden (positiven und negativen) Eintrittsgewinne dar. Aus gleichen Gründen, wie wir sie bei der geschlossenen Gesamtheit erwähnten, muss dieser Betrag Null sein. Wir erhalten dann für die richtig bestimmte Durchschnittsprämie:

(8

$$\bar{P}_{1,1} = \frac{H(o) \int_{x_0}^{\omega} a(x, o) \cdot \bar{A}_x^{lk} \cdot dx + \int_{0}^{\infty} H(\tau) \varphi(\tau) \cdot v^{\tau} \cdot \int_{x_0}^{\omega} a(x, \tau) \cdot \bar{A}_x^{lk} \cdot dx \cdot d\tau}{H(o) \int_{x_0}^{\omega} a(x,o) \cdot \bar{a}_x^{gg} \cdot dx + \int_{0}^{\infty} H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot v^{\tau} \cdot \int_{x_0}^{\omega} a(x, \tau) \cdot \bar{a}_x^{gg} \cdot dx \cdot d\tau}$$

Wenn wir in einer offenen Gesamtheit Durchschnittsprämien erheben, so nehmen wir dadurch eine doppelte Verschiebung der Lasten vor. Einmal entlasten innerhalb jeder Generation die jüngeren und günstigeren Risiken die andern. Dann entlasten aber auch noch die Generationen mit einer günstigeren Altersverteilung die in dieser Beziehung schlechter gestellten Generationen. Wir haben also eine doppelte Durchschnittsbildung, nämlich eine solche in bezug auf das Alter und eine solche in bezug auf den Beitrittstermin. Die Prämie ist auch nicht mehr von der Altersverteilung, sondern von der Schichtung der Altersverteilung abhängig.

Die hier skizzierten Methoden zur Bestimmung der Durchschnittsprämien sind die landläufigen. Wir wollen ihnen nun sowohl für die geschlossene als auch für die offene Gesamtheit eine andere Methode gegenüberstellen, die vom Begriff der Durchschnittsreserve ausgeht und auf dasselbe Resultat führt. Dadurch wird es uns gelingen, in der Sozialversicherung die genau analogen Rechnungsregeln herauszuarbeiten, wie sie für die Individualversicherung gelten. Da die Verhältnisse in der geschlossenen Gesamtheit etwas leichter zu überblicken sind, nehmen wir die Betrachtungen für diese vorweg.

A. Die durchschnittlichen Rechnungsgrössen in der geschlossenen Gesamtheit.

§ 2. Die Durchschnittsreserve.

Wir betrachten eine Krankenkasse t Jahre nach Beginn ihrer Tätigkeit. Der Versichertenbestand bei der Kasseneröffnung möge $B(o)$ Personen betragen haben, deren Altersverteilung durch die Funktion $\alpha(x)$ dargestellt werde. Von einem Eintrittsgeld bei Versicherungsbeginn wollen wir absehen, dagegen zahlen alle Versicherten die gleiche Durchschnittsprämie P_1. Aus den Prämieneinnahmen werden die fortlaufenden Ausgaben für Versicherungsleistungen bestritten. Der Rest wird zu einer Reserve angesammelt.

Nach t Jahren sind noch $B(t)$ Personen vorhanden. Wenn wir die in der Zeit t angesammelte Reserve auf die $B(t)$ Personen gleichmässig verteilen, so erhalten wir die sogenannte Durchschnittsreserve in einer geschlossenen Gesamtheit. Wir bezeichnen sie mit

$V_{\Delta}(t)$. Die Gesamtreserve des Bestandes wird jetzt dargestellt durch das Produkt

$$V_{\Delta}(t) \cdot B(t)$$

Nun wollen wir in analoger Weise, wie wir es für die Reserve in der privaten Krankenversicherung gemacht haben, die Aenderung dieses Betrages im nächsten Zeitmomente t bis $t + dt$ bestimmen. Durch Differentiation erhalten wir einmal:

$$B(t) \cdot d\,V(t) + V(t) \cdot d\,B(t) \qquad (\alpha)$$

Infolge der Verzinsung wächst der Betrag $V_{\Delta}(t) \cdot B(t)$ im Intervalle dt an um

$$\delta \cdot B(t) \cdot V_{\Delta}(t) \cdot dt \qquad (\beta)$$

Im gleichen Momente wird an Prämien eingenommen:

$$\bar{P}_{\Delta} \cdot B(o) \cdot \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(t) \cdot [1 - z(x+t)] \cdot dx \cdot dt \qquad (\gamma)$$

und an Versicherungsleistungen ist zu bezahlen:

$$B(o) \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(t) \cdot [1 - z(x+t)] \cdot \varepsilon^{g}(x+t) \cdot U_{x+t} \cdot dx \cdot dt \qquad (\delta)$$

Diese einzelnen Posten fassen wir nach dem Schema $(\alpha) = (\beta) + (\gamma) - (\delta)$ zusammen, dividieren die ganze Gleichung durch dt und $B(t)$, führen die Abkürzungen ein

$$B^{g}(t) = B(o) \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(t) \cdot [1 - z(x+t)] \cdot dx \qquad (89)$$

$$J^{B}(t) = \frac{B(o)}{B(t)} \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(t) \cdot [1 - z(x+t)] \cdot \varepsilon^{g}(x+t) \cdot U_{x+t} \cdot dx \qquad (90)$$

und die Intensitätsfunktion

$$\eta^{B}(t) = -\frac{d\,B(t)}{B(t) \cdot dt} \qquad (91)$$

so erhalten wir für die Durchschnittsreserve die folgende lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{dV_{\Delta}(t)}{dt} = [\delta + \eta^{B}(t)] \cdot V_{\Delta}(t) + \frac{B^{g}(t)}{B(t)} \cdot \bar{P}_{\Delta} - J^{B}(t) \qquad (92)$$

Diese ist analog gebaut, wie die Reservendifferentialgleichung in der privaten Krankenversicherung.

Durch einfache Integration nach Formel (40) ergibt sich hieraus die allgemeine Gleichung

$$V_{\Delta}(t) = \frac{B(o) \cdot C}{v^{t} \cdot B(t)} + \frac{1}{v^{t} \cdot B(t)} \int_{o}^{t} v^{\lambda} [B^{g}(\lambda) \cdot \bar{P}_{\Delta} - B(\lambda) \cdot J^{B}(\lambda)] \cdot d\lambda \qquad (93)$$

Setzen wir darin für $C = V_{\Delta}(o)$, so erhalten wir die retrospektive Definitionsgleichung für die Durchschnittsreserve:

$$V_{\Delta}(t) = \frac{B(o) \cdot V_{\Delta}(o)}{v^{t} \cdot B(t)} + \frac{1}{v^{t} \cdot B(t)} \int_{o}^{t} v^{\lambda} [B^{g}(\lambda) \cdot \bar{P}_{\Delta} - B(\lambda) \cdot J^{B}(\lambda)] \cdot d\lambda \qquad (94)$$

Da die Gesamtheit mit der Zeit ausstirbt, wird offenbar $V_{\Delta}(\infty) = o$ und damit

$$C = -\frac{1}{B(o)} \int_{o}^{\infty} v^{\lambda} [B^{g}(\lambda) \cdot \bar{P}_{\Delta} - B(\lambda) \cdot J^{B}(\lambda)] \cdot d\lambda$$

Setzen wir diesen Wert für die Konstante ein, so bekommen wir auch die prospektive Definitionsformel für die Durchschnittsreserve:

$$V_{\Delta}(t) = \frac{1}{v^{t} \cdot B(t)} \cdot \int_{t}^{\infty} v^{\lambda} [B(\lambda) \cdot J^{B}(\lambda) - B^{g}(\lambda) \cdot \bar{P}_{\Delta}] \cdot d\lambda \qquad (95)$$

Durch die beiden Ausdrücke (94) und (95) wird also die Durchschnittsreserve auf genau analoge Weise definiert, wie die Individualreserve in der Privatversicherung. An Stelle der Ueberlebens-

ordnung $l(x+t)$ steht die Abfallordnung des Gesamtbestandes $B(t)$, an Stelle der Ordnung der Gesunden $l^{gg}(x+\lambda)$ die „Ordnung der Gesunden" $B^{g}(\lambda)$, an Stelle der Individualprämie $\bar{P}_x$ die Durchschnittsprämie $\bar{P}_{\Delta}$ und an Stelle der vom Alter abhängigen Durchschnittsleistung $j(x+\lambda)$ die generelle, vom Alter unabhängige Durchschnittsleistung $J^{B}(\lambda)$. Es lässt sich auch ohne weiteres zeigen, dass die prospektive und die retrospektive Berechnungsmethode der Durchschnittsreserve auf dasselbe rechnerische Resultat führen müssen. Man hat einfach aus (95) $V_{\Delta}(o)$ zu berechnen und in (94) einzusetzen, dann geht (94) selber über in (95).

Wir wissen, dass das Deckungskapital in der Privatversicherung vom Eintrittsalter abhängig ist. Es lässt sich nun auch leicht einsehen, dass die Einzel-Durchschnittsreserve in einer geschlossenen Kasse von der Altersverteilung bei Versicherungsbeginn abhängt. Dagegen ist sie von der Bestandesgrösse unabhängig. Setzen wir nämlich für $B(t) = B(o) \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(t) \cdot dx$ ein, so zeigt sich, dass die durchschnittliche Leistung $J^{B}(t)$ von der Bestandesgrösse unabhängig ist:

$$J^{B}(t) = \frac{1}{\int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(t) \cdot dx} \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(t) \cdot [1 - z(x+t)] \cdot \varepsilon^{g}(x+t) \cdot U_{x+t} \cdot dx \qquad (90^*)$$

Erinnern wir uns ferner noch, dass $B^{g}(\lambda)$ die Abkürzung ist für

$$B^{g}(\lambda) = B(o) \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(\lambda) \cdot [1 - z(x+\lambda)] \cdot dx$$

so sehen wir, dass sich in der Formel (93) überall $B(o)$ wegkürzt und nur noch bleibt:

$$V_{\Delta}(t) = \frac{1}{v^t \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(t) \cdot dx} \left[C + \int_0^t d\lambda \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\, p_x(\lambda)\,[1 - z(x+\lambda)]\,\{\bar{P}_{\Delta} - U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda)\}\, dx \right] \qquad (93^*)$$

Es wäre nun noch zu zeigen, dass sich die Durchschnittsreserve $V_{\Delta}(t)$ auch durch Integralgleichungen darstellen lässt. Man hätte zu diesem Zwecke wiederum die Reservendifferentialgleichung in entsprechend anderen Anordnungen zu schreiben und die Integration durchzuführen. Das rechnerische Vorgehen wäre also genau dasselbe wie beim individuellen Deckungskapital. Wir sehen aber jetzt hier von der Durchführung dieser Untersuchung ab, da sie uns nichts prinzipiell neues bieten kann.

Zum Schlusse kann bemerkt werden, dass sich auf bekannte Weise aus der Reservendifferentialgleichung noch die Ungleichung ableiten lässt:

$$0 \leqq V_{\Delta}(t) \leqq \frac{J^B(t) - \frac{B^g(t)}{B(t)} \cdot P_{\Delta}}{\delta} \qquad (96)$$

§ 3. Zusammenhang zwischen Durchschnittsreserve und Individualreserve.

Wir kehren zurück zu unserer Formel (93) und schreiben darin statt der Abkürzungen $B^g(\lambda)$ und $J^B(\lambda)$ wiederum die ursprünglichen Werte nach (89) und (90).

$$V_{\Delta}(t) = \frac{B(o)}{v^t \cdot B(t)} \left[C + \int_0^t v^{\lambda} \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(\lambda) \cdot \right. \qquad (97)$$

$$\left. \cdot\, [1 - z(x+\lambda)]\,\{P_{\Delta} - U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^g(x+\lambda)\}\, dx \cdot d\lambda \right]$$

Bezeichnen wir, wie früher, mit P_x die Individualprämie und die Differenz $\bar{P}_{\Delta} - \bar{P}_x$ mit Δ_x, so können wir in unserem Ausdruck

$$\bar{P}_{\Delta} = \bar{P}_x + \Delta_x$$

einsetzen. Ferner können wir im Doppelintegral die Integrationsfolge vertauschen und erhalten:

Doppelintegral =

$$\int_{x_0}^{\omega} \frac{a(x)}{l(x)} \int_{0}^{t} v^{\lambda} \cdot l(x+\lambda) \cdot [1 - z(x+\lambda)] \cdot \{\bar{P}_x - U_{x+\lambda} \cdot \varepsilon^{g}(x+\lambda)\} \cdot d\lambda \cdot dx$$

$$+ \int_{x_0}^{\omega} \frac{a(x) \cdot A_x}{l(x)} \int_{0}^{t} v^{\lambda} \cdot l(x+\lambda) \cdot [1 - z(x+\lambda)] \cdot d\lambda \cdot dx$$

Unter Berücksichtigung von (50) kann die Individualreserve der Privatversicherung in die Rechnung eingeführt werden. Das Eintrittsgeld $\bar{E}_x$ in (50) ist gleich Null, da P_x die richtig berechnete Individualprämie bedeutet. Schliesslich stellt uns das zweite Integral gerade die Gesundenrente dar, zahlbar während t Jahren. Wir können also auch schreiben:

Doppelintegral =

$$\int_{x_0}^{\omega} \frac{a(x)}{l(x)} v^{t} \cdot l(x+t) \cdot V_x(t) \cdot dx + \int_{x_0}^{\omega} a(x) \cdot A_x \cdot \bar{a}^{gg}_{x;\,\overline{t}|} \cdot dx$$

$$= v^{t} \int_{x_0}^{\omega} a(x) \cdot p_x(t) \cdot V_x(t) \cdot dx + \int_{x_0}^{\omega} a(x) \cdot A_x \cdot \bar{a}^{gg}_{x;\,\overline{t}|} \cdot dx$$

Setzen wir das in (97) ein, so geht die Gleichung für die Durchschnittsreserve über in:

$$V_A(t) = \frac{B(o)}{v^{t} \cdot B(t)} \left[C + v^{t} \int_{x_0}^{\omega} a(x)\, p_x(t) \cdot V_x(t) \cdot dx + \int_{x_0}^{\omega} a(x) \cdot A_x \cdot \bar{a}^{gg}_{x;\,\overline{t}|} \cdot dx \right] \tag{98}$$

Daraus erhalten wir, wenn wir wieder für $C = V_{\Delta}(o)$ setzen:

$$V_{\Delta}(t) = \frac{B(o)}{B(t)} \left[\frac{V_{\Delta}(o)}{v^t} + \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(t) \cdot V_x(t) \cdot dx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{v^t} \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot \Delta_x \cdot \bar{a}^{gg}_{x;\,\overline{t}|} \cdot dx \right] \tag{99}$$

Die Durchschnittsreserve besteht also aus dem Anteil an der aufgezinsten Anfangsreserve, aus dem Durchschnitt aller Individualreserven und dem Durchschnitt der in der Zeit t gemachten und aufgezinsten „Prämiengewinne" $\bar{P}_{\Delta} - \bar{P}_x$.

Setzen wir in (98) für $t = \infty$ wiederum $V_{\Delta}(\infty) = o$, so wird

$$C = -\int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot \Delta_x \cdot \bar{a}^{gg}_x \cdot dx$$

und somit

$$V_{\Delta}(t) = \frac{B(o)}{B(t)} \left[\int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(t) \cdot V_x(t) \cdot dx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{v^t} \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot \Delta_x \cdot [\bar{a}^{gg}_{x;\,\overline{t}|} - \bar{a}^{gg}_x] \cdot dx \right]$$

Nach (47*) ist aber

$$\bar{a}^{gg}_{x;\,\overline{t}|} - \bar{a}^{gg}_x = -\frac{v^t \cdot l^{gg}(x+t)}{l^{gg}(x)} \cdot \bar{a}^{gg}_{x+t}$$

$$= -v^t \cdot p_x(t) \cdot [1 - z(x+t)] \cdot \bar{a}^{gg}_{x+t}$$

Damit erhalten wir auch:

$$V_{\mathcal{A}}(t) = \frac{B(o)}{B(t)} \left[\int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(t) \cdot V_x(t) \cdot dx - \right.$$
$$\left. - \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(t) \cdot [1 - z(x+t)] \cdot \mathcal{A}_x \cdot \bar{a}^{gg}_{x+t} \cdot dx \right] \tag{100}$$

Die Durchschnittsreserve besteht danach aus dem Durchschnitt der Individualreserven, vermindert um den durchschnittlichen Barwert der in der Zukunft noch zu machenden „Prämiengewinne" $P_{\mathcal{A}} - \bar{P}_x$.

Aus der letzten Formel erhalten wir noch für das Deckungskapital am Anfang, da $V_x(o) = o$ ist:

$$V_{\mathcal{A}}(o) = - \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot \mathcal{A}_x \cdot \bar{a}^{gg}_{x} \cdot dx \tag{101}$$

Die Reserve zu Beginn der Versicherung ist also gleich dem negativen Barwert der „Prämiengewinne", oder gleich dem negativen durchschnittlichen Eintrittsgewinn.*)

$$V_{\mathcal{A}}(o) = - \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot g_x \cdot dx \tag{101*}$$

Wenn die Kasse wirklich Eintrittsgewinne macht, so erhalten wir für die Reserve zu Beginn also negative Werte. Nun können wir aber hier, genau mit dem gleichen Recht, wie in der Privatversicherung, verlangen, dass die Anfangsreserve bei richtig berechneter Durchschnittsprämie gleich Null sei. Als Kriterium für die richtige Bemessung der Durchschnittsprämie gilt dann wiederum

) Siehe Formel (81), wo $P_{\mathcal{A}} - P_x = \mathcal{A}_x$ zu setzen ist.

$$V_{\Delta}(o) = \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot \Delta_x \cdot \bar{a}_x^{gg} \cdot dx = o \qquad (102)$$

Diese Forderung stimmt überein mit derjenigen, welche wir in § 1 dieses Kapitels aufgestellt haben: Die Summe aller Eintrittsgewinne bezw. -verluste hat zu verschwinden.

§ 4. Die durchschnittliche Anwartschaft.

Wir können in Kassen mit Durchschnittsprämien auch mit einer durchschnittlichen Anwartschaft rechnen. Wir definieren sie in analoger Weise wie in der privaten Krankenversicherung die individuelle Anwartschaft, indem wir einfach in den Gleichungen für die Durchschnittsreserve die Prämie $\bar{P}_{\Delta}$ vernachlässigen. Die durchschnittliche Anwartschaft eines Mitgliedes nach t Jahren Kassenzugehörigkeit bezeichnen wir mit $\bar{A}_{\Delta}^{lk}(t)$. Aus (92) erhalten wir dann die Differentialgleichung der durchschnittlichen Anwartschaft:

$$\frac{d\bar{A}_{\Delta}^{lk}(t)}{dt} = (\delta + \eta^B(t)) \cdot \bar{A}_{\Delta}^{lk}(t) - J^B(t) \qquad (103)$$

Die Integration ergibt uns:

$$A_{\Delta}^{lk}(t) = \frac{B(o)}{v^t \cdot B(t)} \cdot C - \frac{1}{v^t \cdot B(t)} \int_o^t v^{\lambda} \cdot B(\lambda) \cdot J^B(\lambda) \cdot d\lambda \qquad (104)$$

Das ist aber gleichbedeutend mit:

$$\bar{A}_{\Delta}^{lk}(t) = \frac{B(o)}{v^t \cdot B(t)} \left[C - \int_o^t v^{\lambda} \cdot \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(\lambda) \cdot [1 - z(x+\lambda)] \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \varepsilon^g(x+\lambda) \cdot U_{x+\lambda} \cdot d\lambda \right]$$

Vertauschen wir die Integrationsfolge und berücksichtigen die Beziehung (74), so erhalten wir sofort die Beziehung mit der individuellen Anwartschaft:

$$\overline{A}^{lk}_{\measuredangle}(t) = \frac{B(o)}{v^t \cdot B(t)} \left[C - \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot \overline{A}^{lk}_{x;\,\overline{t}|} \cdot dx \right] \qquad (104^*)$$

Setzen wir für $t = o$ die Konstante $C = \overline{A}^{lk}_{\measuredangle}(o)$, so wird

$$\overline{A}^{lk}_{\measuredangle}(t) = \frac{B(o)}{v^t \cdot B(t)} \left[\overline{A}^{lk}_{\measuredangle}(o) - \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot \overline{A}^{lk}_{x;\,\overline{t}|} \cdot dx \right] \qquad (105)$$

Anderseits ist sicher für $t = \infty$ auch $\overline{A}^{lk}_{\measuredangle}(\infty) = o$ und somit

$$\overline{A}^{lk}_{\measuredangle}(t) = \frac{B(o)}{v^t \cdot B(t)} \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot \left[\overline{A}^{lk}_{x} - \overline{A}^{lk}_{x;\,\overline{t}|} \right] \cdot dx \qquad (106)$$

Berücksichtigen wir noch die Beziehung (71*), so geht (106) über in

$$\overline{A}^{lk}_{\measuredangle}(t) = \frac{B(o)}{B(t)} \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(t) \cdot \overline{A}^{lk}_{x+t} \cdot dx \qquad (107)$$

Daraus erhalten wir speziell für die lebenslängliche Anwartschaft zu Beginn der Versicherung

$$\overline{A}^{lk}_{\measuredangle}(o) = \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot \overline{A}^{lk}_{x} \cdot dx \qquad (108)$$

Führen wir noch die durchschnittliche temporäre Anwartschaft ein

$$\overline{A}^{lk}_{\Delta;\,\overline{t}|} = \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot \overline{A}^{lk}_{x;\,\overline{t}|} \cdot dx \qquad (109)$$

so erhalten wir aus (105) die analoge Beziehung wie (71*):

$$\overline{A}^{lk}_{\Delta}(t) = \frac{B(o)}{v^t \cdot B(t)} \left[\overline{A}^{lk}_{\Delta}(o) - \overline{A}^{lk}_{\Delta;\,\overline{t}|} \right] \qquad (105^*)$$

Mittelst der aufgeschobenen Anwartschaft

$$_{t|}\overline{A}^{lk}_{\Delta} = \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot {}_{t|}\overline{A}^{lk}_{x} \cdot dx \qquad (110)$$

lässt sich ferner aus (107) eine analoge Beziehung herleiten wie (72*), nach welcher $p_x(t) \cdot \overline{A}^{lk}_{x+t} = {}_{t|}\overline{A}^{lk}_{x}$ ist:

$$\overline{A}^{lk}_{\Delta}(t) = \frac{B(o)}{B(t)} \cdot {}_{t|}\overline{A}^{lk}_{\Delta} \qquad (107^*)$$

Es kann noch bemerkt werden, dass sich aus der Differentialgleichung (103) auf die bekannte Weise für die durchschnittliche Anwartschaft die folgende Ungleichung ableiten lässt:

$$o \leqq \overline{A}^{lk}_{\Delta}(t) \leqq \frac{J^B(t)}{\delta} \qquad (111)$$

§ 5. Der durchschnittliche Gesundenrentenbarwert.

Dem individuellen Rentenbarwert $\bar{a}^{gg}_{x+t}$ entspreche in einer geschlossenen Gesamtheit ein durchschnittlicher Gesundenrentenbarwert $\bar{a}^{gg}_{\Delta}(t)$. Wir definieren ihn durch die Differentialgleichung

$$\frac{d\,\bar{a}^{gg}_{\Delta}(t)}{dt} = \left(\delta - \frac{d\,B^g(t)}{B^g(t) \cdot dt}\right) \cdot \bar{a}^{gg}_{\Delta}(t) - 1 \qquad (112)$$

Diese Gleichung wird nach der analogen Methode abgeleitet, wie die Differentialgleichung für den individuellen Barwert. Die Integration der Gleichung ergibt uns:

$$\bar{a}_{\mathcal{A}}^{gg}(t) = \frac{B^{g}(o)}{v^{t} \cdot B^{g}(t)} \left[C - \frac{1}{B^{g}(o)} \int_{o}^{t} v^{\lambda} \cdot B^{g}(\lambda) \cdot d\lambda \right] \tag{113}$$

Indem wir für $B^{g}(\lambda)$ nach (89) unter dem Integral einsetzen und die Integrationsfolge vertauschen, erhalten wir sofort den Zusammenhang mit dem individuellen Barwert $\bar{a}_{x;\overline{t}|}^{gg}$:

$$\bar{a}_{\mathcal{A}}^{gg}(t) = \frac{B^{g}(o)}{v^{t} \cdot B^{g}(t)} \left[C - \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot \bar{a}_{x;\overline{t}|}^{gg} \cdot dx \right] \tag{114}$$

Für $t = o$ wird $C = \bar{a}_{\mathcal{A}}^{gg}(o)$ und somit

$$\bar{a}_{\mathcal{A}}^{gg}(t) = \frac{B^{g}(o)}{v^{t} \cdot B^{g}(t)} \left[\bar{a}_{\mathcal{A}}^{gg}(o) - \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot \bar{a}_{x;\overline{t}|}^{gg} \cdot dx \right] \tag{115}$$

Setzen wir aber für $t = \infty$ auch $\bar{a}_{\mathcal{A}}^{gg}(\infty) = o$, so wird $C = \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot \bar{a}_{x}^{gg} \cdot dx$ und damit unter Berücksichtigung der Beziehungen (47*) und (35*)

$$\bar{a}_{\mathcal{A}}^{gg}(t) = \frac{B^{g}(o)}{B^{g}(t)} \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot {}_{t|}\bar{a}_{x}^{gg} \cdot dx \tag{116}$$

Daraus ergibt sich speziell für den Barwert bei Versicherungsbeginn:

$$\bar{a}_{\mathcal{A}}^{gg}(o) = \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot \bar{a}_{x}^{gg} \cdot dx \tag{117}$$

Definieren wir noch den Barwert der temporären Rente durch

$$\bar{a}^{gg}_{\mathcal{A};\overline{t}|} = \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot \bar{a}^{gg}_{x;\overline{t}|} \cdot dx \qquad (118)$$

und den Barwert für die aufgeschobene Rente durch

$$ {}_{t|}\bar{a}^{gg}_{\mathcal{A}} = \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot {}_{t|}\bar{a}^{gg}_{x} \cdot dx \qquad (119)$$

so geht die Formel (115) über in

$$\bar{a}^{gg}_{\mathcal{A}}(t) = \frac{B^g(o)}{v^t \cdot B^g(t)} \left[\bar{a}^{gg}_{\mathcal{A}} - \bar{a}^{gg}_{\mathcal{A};\overline{t}|} \right] \qquad (115^*)$$

und aus (116) wird

$$\bar{a}^{gg}_{\mathcal{A}}(t) = \frac{B^g(o)}{B^g(t)} \cdot {}_{t|}\bar{a}^{gg}_{\mathcal{A}}(o) \qquad (116^*)$$

Wir bekommen also für den durchschnittlichen Gesundenrentenbarwert die genau gleichen Beziehungen wie für den individuellen.

Aus der Differentialgleichung (112) geht durch die bekannten Ueberlegungen hervor, dass auch der durchschnittliche Barwert die Ungleichung erfüllt:

$$o \leqq \bar{a}^{gg}_{\mathcal{A}}(t) \leqq \frac{1}{\delta} \qquad (120)$$

§ 6. Die durchschnittliche Prämie.

Wir haben bereits gesehen, dass die Durchschnittsreserve am Anfang gleich Null sein muss

$$V_{\mathcal{A}}(o) = o$$

Aus der prospektiven Darstellung der Durchschnittsreserve in Gleichung (95) erhalten wir somit ohne weiteres die Berechnungsregel für die Durchschnittsprämie:

$$P_{\mathcal{J}} = \frac{\int_0^\infty v^\lambda \cdot B(\lambda) \cdot J^B(\lambda) \cdot d\lambda}{\int_0^\infty v^\lambda \cdot B^g(\lambda) \cdot d\lambda} \tag{121}$$

Wenn wir auf die Formeln (104) und (113) zurückschauen, so sehen wir, dass wir im Zähler gerade die durchschnittliche Anwartschaft und im Nenner den durchschnittlichen Gesundenrentenbarwert für $t = \infty$ haben. Die Prämienformel kann also auch folgendermassen geschrieben werden:

$$\bar{P}_{\mathcal{J}} = \frac{\bar{A}^{lk}_{\mathcal{J}}(o)}{\bar{a}^{gg}_{\mathcal{J}}(o)} \tag{122}$$

Die Formel für die Durchschnittsprämie in der geschlossenen Gesamtheit hat also genau die gleiche Gestalt, wie die Formel für die individuelle Prämie, wenn wir die Anwartschaft und den Rentenbarwert in geeigneter Weise definieren.

Ersetzen wir $\bar{A}^{lk}_{\mathcal{J}}(o)$ und $\bar{a}^{gg}_{\mathcal{J}}(o)$ nach (108) und (117), so bekommen wir schliesslich noch eine dritte Darstellung für die Durchschnittsprämie, nämlich

$$P_{\mathcal{J}} = \frac{\int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot \bar{A}^{lk}_x \cdot dx}{\int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot \bar{a}^{gg}_x \cdot dx} \tag{123}$$

Diese Formel stimmt aber genau mit der eingangs erwähnten und auf andere Weise abgeleiteten Formel (86) überein.

§ 7. Die Umlage.

Wenn auf die Anlage einer Reserve verzichtet wird, so haben wir auch hier wiederum das Umlageverfahren vor uns. Die Durchschnittsprämie $\bar{P}_{\mathcal{J}}$ wird dann zum Umlagebeitrag $\bar{P}^u_{\mathcal{J}}(t)$, dessen Grösse wir aus der Reservendifferentialgleichung (92) bestimmen

können, wenn wir dort $V_{\mathcal{A}}(t) = o$ und auch $\frac{dV_{\mathcal{A}}(t)}{dt} = o$ setzen. Es wird dann

$$\bar{P}^{u}_{\mathcal{A}}(t) = \frac{B(t)}{B^{g}(t)} \cdot J^{B}(t) \qquad (124)$$

Der Unterschied zwischen dem Umlageverfahren und dem Durchschnittsprämienverfahren in der geschlossenen Gesamtheit ergibt sich sofort, wenn wir in der Reservendifferentialgleichung (92) für

$$J^{B}(t) = \frac{B^{g}(t)}{B(t)} \cdot \bar{P}^{u}_{\mathcal{A}}(\lambda)$$

einsetzen und gliedweise zwischen den Grenzen o und ∞ integrieren. Es resultiert dann die Gleichung:

$$\int_{o}^{\infty} \frac{B^{g}(\lambda)}{B(\lambda)} [\bar{P}^{u}_{\mathcal{A}}(\lambda) - \bar{P}_{\mathcal{A}}] \cdot d\lambda = \int_{o}^{\infty} [\delta + \eta^{B}(\lambda)] \cdot V_{\mathcal{A}}(\lambda) \cdot d\lambda \qquad (125)$$

Diese lässt uns erkennen, dass der Mehrbetrag, den die Versicherten im gesamten bei Anwendung des Umlageverfahrens statt des Durchschnittsprämienverfahrens bezahlen müssen, gerade gleich ist den Zinserträgnissen und den Erbschaften infolge Aussterbens des Bestandes $B(t)$. Wenn also eine Reserve angesammelt wird, so kommen diese Einnahmen den Versicherten zu gute, bei Anwendung des Umlageverfahrens hingegen gehen sie für sie verloren.

B. Die durchschnittlichen Rechnungsgrössen in der offenen Gesamtheit.

§ 8. Die Durchschnittsreserve.

Sowohl bei der privaten Krankenversicherung als auch bei Kassen mit Durchschnittsprämien haben wir die Einzelreserve so bestimmt, dass wir das *effektiv vorhandene* totale Deckungskapital gleichmässig verteilt haben auf den *effektiv vorhandenen* Personenbestand. Dies ist aber nur erlaubt, wenn die in Rechnung stehenden

Versicherten in bezug auf die Dauer der Kassenzugehörigkeit gleichgestellt sind. In einer Kasse nun, wo während der Dauer der Kassentätigkeit stets neue Personen eintreten, die zur versicherten Gesamtheit gehören, ist dies nicht mehr der Fall. Die Methode der Reservenberechnung muss daher entsprechend modifiziert werden.

Wir erhalten aber trotzdem ein genaues Analogen zur Rechnungsweise in der Privatversicherung und in der geschlossenen Gesamtheit, wenn wir folgendes bedenken: Bis jetzt haben wir immer die Einzelreserve bestimmt für einen Zeitpunkt t Jahre nach Wirkungsbeginn des Versicherungsverhältnisses, d. h. für die Zeit t Jahre nach dem Eintritt des Versicherten. Die Summe aller t-jährigen Einzelreserven ergab uns für den Zeitpunkt t den Wert des gesamten Deckungskapitals. Dieser stimmte aber immer gerade überein mit dem effektiv vorhandenen Deckungskapital, weil auch schon alle Personen, die von diesem Zeitpunkte an noch durch die Versicherung hindurchgehen, tatsächlich vorhanden waren. Betrachten wir nun in einer offenen Gesamtheit alle t-jährigen Reserven miteinander, die in der ganzen in unbegrenzter Zukunft einmal durch die Versicherung hindurchgehenden Personengesamtheit jemals auftreten werden, so müssen wir, um im Zeitpunkt der Kassenbilanz den effektiven Wert all dieser Einzelreserven zu bestimmen, deren *Barwerte* summieren. Denn es entsteht ja ein Teil dieser t-jährigen Reserven erst in einem späteren Zeitpunkte, als die Bilanz erstellt wird, weil noch gar nicht alle Personen, die einmal zu dieser Reserve Anlass geben, eingetreten sind, und weil von denen, welche schon Kassenmitglied geworden sind, noch nicht alle eine t-jährige Reserve beanspruchen können.

Wir sehen uns also gezwungen, beim Rechnen in einer offenen Gesamtheit einen neuen Begriff einzuführen: Den *Barwert der t-jährigen Reserven*. Dieser Barwert stimmt selbstverständlich jetzt nicht mehr überein mit dem Wert des effektiv vorhandenen Dekkungskapitals. Die Einzelreserve ergibt sich daraus auch nicht, indem man durch den effektiv vorhandenen Versichertenbestand dividiert, sondern man hat wiederum alle versicherten und noch zu versichernden Personen zu berücksichtigen. Das können wir aber leicht, wenn wir gleichzeitig mit dem Barwert der t-jährigen Reserven auch noch den *Barwert aller Leistungen* 1 *im t-ten Versicherungsjahr* einführen. Der Quotient dieser beiden Barwerte muss auf die Einzelreserve führen, genau gleich, wie in der Privat-

versicherung der Barwert der Leistungen P_x dividiert durch den Barwert der Leistungen 1 die Individualprämie ergibt.

Wir erkennen damit, dass die Entwicklung in bezug auf *zwei* Zeitmasse berücksichtigt werden muss, wenn die finanziellen Vorgänge in einer offenen Gesamtheit studiert werden sollen. Einmal spielt die Zugehörigkeitsdauer der einzelnen Generation, dann aber auch die unbeschränkte Entwicklungsdauer der Kasse eine wesentliche Rolle. Solange eine Versicherungskasse mit jeder Generation einzeln verkehrt, wie dies bei der Individualversicherung und in der geschlossenen Gesamtheit der Fall ist, kann die Entwicklungsdauer der Kasse bei allen Rechnungen, die das finanzielle Gleichgewicht zwischen Versicherer und Versichertem angehen, vernachlässigt werden. Sobald aber eine offene Gesamtheit vorliegt und Rechnungen über das finanzielle Gleichgewicht zwischen ihr und der Kasse anzustellen sind, tritt sie automatisch in Aktion.

Wenn wir die Reservenberechnung nach der angedeuteten Weise vornehmen, so vollziehen wir dadurch eine doppelte Durchschnittsbildung und wir müssen eine Reserve erhalten, die weder vom Alter noch von der Zeit des Eintritts in die Kasse, sondern nur von der Zugehörigkeitsdauer abhängig ist. Eine derartige Durchschnittsbildung entspricht aber genau dem Wesen der offenen Kasse, die eine Verteilung der Lasten auch so vorsieht, dass innerhalb jeder Generation die jüngeren und günstigeren Risiken die andern, und zwischen den Generationen diejenigen mit einer günstigeren Altersverteilung die andern entlasten, und welche schon zum voraus verlangt, dass von allen Versicherten immer die gleiche Durchschnittsprämie zu entrichten sei. Gleichzeitig haben wir damit aber auch das genaue Analogon zur Reservenberechnung in der geschlossenen Gesamtheit. Der Unterschied besteht lediglich darin, dass wir statt mit dem effektiv vorhandenen Versichertenbestande mit den diskontierten Beständen aller Generationen rechnen.*)

Wir berechnen nun in einer offenen Gesamtheit alle t-jährigen Reserven miteinander. Nach einer Zugehörigkeitsdauer von t Jahren beansprucht jede Person die gleiche Reserve vom Betrage $V_{\Delta\Delta}(t)$. Alle Personen bezahlen ferner die gleiche Durchschnittsprämie $\bar{P}_{\Delta\Delta}$.

---

*) Darauf hat bereits Herr *Dr. A. Zalenka* [24] hingewiesen, der meines Wissens die Durchschnittsreserve in der offenen Gesamtheit erstmals nach diesen Prinzipien definiert hat.

Nun sind von den anfänglichen $H(o)$ Mitgliedern, mit denen die Kasse ihre Tätigkeit eröffnet hat, nach der Zeit t noch

$$H(o) \cdot \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x, o) \cdot p_x(t) \cdot dx$$

vorhanden. Diesen soll vorübergehend die „Reserve" 1 gutgeschrieben werden. Ferner sind von den zur Zeit τ Eingetretenen nach weiteren t Jahren noch

$$H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x, \tau) \cdot p_x(t) \cdot dx \cdot d\tau$$

in der versicherten Gesamtheit. Wir geben auch diesen die „Reserve" 1. Diese Reserve kommt aber erst nach $\tau + t$ Jahren Kassentätigkeit zustande, so dass ihr Barwert nach t Jahren Kassentätigkeit sich darstellt durch:

$$H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot v^{\tau} \cdot \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x, \tau) \cdot p_x(t) \cdot dx \cdot d\tau$$

Um alle Neueintritte in der unbegrenzten Zukunft zu berücksichtigen, haben wir den letzten Ausdruck noch über τ in den Grenzen o und ∞ zu integrieren. Der Barwert aller t-jährigen „Reserven" im Betrage 1 oder, m. a. Worten, der Barwert der Leistungen 1 im t-ten Versicherungsjahr beträgt somit nach t Jahren Kassentätigkeit:

$$H(o) \cdot \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x, o) \cdot p_x(t) \cdot dx + \int_{o}^{\infty} H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot v^{\tau} \cdot \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x, \tau) \cdot p_x(t) \cdot dx \cdot d\tau \tag{126}$$

Dafür werden wir in Zukunft die Abkürzung setzen:

$$\Phi(t) \tag{126*}$$

Der Barwert der t-jährigen Reserven nach einer Kassentätigkeit von t Jahren stellt sich also dar durch das Produkt:

$$V_{AA}(t) \cdot \Phi(t) \qquad (127)$$

Wir wollen nun versuchen, für unsere Durchschnittsreserve ebenfalls eine Differentialgleichung direkt anzusetzen. Dabei müssen wir naturgemäss auch immer mit den Barwertänderungen der Einnahmen und Ausgaben operieren. Vorerst differenzieren wir einmal den Ausdruck (127) nach t und erhalten für die Aenderung des Reservenbarwertes in dem Intervalle t bis $t + dt$:

$$\Phi(t) \cdot d\,V_{AA}(t) + V_{AA}(t) \cdot d\,\Phi(t) \qquad (\alpha)$$

Der Barwert der Zinseinnahmen in dem Intervalle t bis $t + dt$ ist

$$\delta \cdot V_{AA}(t) \cdot \Phi(t) \cdot dt \qquad (\beta)$$

Definieren wir noch in genau analoger Weise, wie das für die Grösse $\Phi(t)$ geschehen ist, durch

$$\Phi^g(t) = H(o) \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x,o) \cdot p_x(t) \cdot [1 - z(x+t)] \cdot dx + \\ + \int_{o}^{\infty} H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot v^{\tau} \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x,\tau) \cdot p_x(t) \cdot [1 - z(x+t)] \cdot dx \cdot d\tau \qquad (128)$$

den *Barwert des Gesundenrentenbarwertes* 1 *der Mitglieder mit einer t-jährigen Mitgliedschaft*, so können wir den Barwert der Prämieneinnahmen in den betrachteten Intervallen darstellen durch

$$\bar{P}_{AA} \cdot \Phi^g(t) \cdot dt \qquad (\gamma)$$

Schliesslich findet noch eine Abnahme des Reservenbarwertes statt infolge der Versicherungsleistungen. An die übrigbleibenden von der Anfangsgesamtheit wird in dem betrachteten Intervall ausgerichtet:

$$H(o) \cdot \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x,o) \cdot p_x(t) \cdot [1 - z(x+t)] \cdot \varepsilon^g(x+t) \cdot U_{x+t} \cdot dx$$

Der Barwert der Versicherungsleistungen im Intervall dt an die später eingetretenen Personen beträgt:

$$\int_0^\infty H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot v^\tau \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x, \tau) \cdot p_x(t) \cdot [1 - z(x+t)] \cdot \varepsilon^g(x+t) \cdot U_{x+t} \cdot dx \cdot d\tau$$

Also ist der gesamte Barwert dieser Leistungen im Intervall dt

$$\Phi(t) \cdot J^H(t) \cdot dt \qquad (\delta)$$

wenn wir noch zur Abkürzung die durchschnittliche Jahresleistung einführen:

$$J^H(t) = \frac{1}{\Phi(t)} \left[H(o) \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x,o) \cdot p_x(t) \cdot [1 - z(x+t)] \cdot \varepsilon^g(x+t) \cdot U_{x+t} \cdot dx + \right. \qquad (129)$$

$$\left. + \int_0^\infty H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot v^\tau \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x,\tau) \cdot p_x(t) \cdot [1 - z(x+t)] \cdot \varepsilon^g(x+t) \cdot U_{x+t} \cdot dx \cdot dt \right]$$

Fassen wir jetzt nach dem Schema $(\alpha) = (\beta) + (\gamma) - (\delta)$ die einzelnen Posten zusammen, dividieren noch die ganze Gleichung durch $\Phi(t) \cdot dt$ und führen die Intensität ein

$$\eta^\Phi(t) = -\frac{d\Phi(t)}{\Phi(t) \cdot dt} \qquad (130)$$

so erhalten wir für die Durchschnittsreserve auch eine lineare Differentialgleichung I. Ordnung.

(131)

$$\frac{dV_{\Delta\Delta}(t)}{dt} = (\delta + \eta^\Phi(t)) \cdot V_{\Delta\Delta}(t) + \frac{\Phi^g(t)}{\Phi(t)} \bar{P}_{\Delta\Delta} - J^H(t)$$

Diese ist wiederum ganz analog gebaut wie die Differentialgleichung für die Durchschnittsreserve in der geschlossenen Gesamt-

heit, nur dass an Stelle der Grössen $B(t)$, $B^g(t)$ und $J^B(t)$ die Barwerte $\Phi(t)$, $\Phi^g(t)$ und die durchschnittliche Jahresleistung $J^H(t)$ stehen. Dabei ist $J^H(t)$ auch durch eine doppelte Durchschnittsbildung gewonnen worden. Ferner steht an Stelle der Intensität $\eta^B(t)$ für die Bestandesänderung die Intensität $\eta^\Phi(t)$, welche die Aenderung des *diskontierten* Bestandes misst.

Die Integration der Reservendifferentialgleichung (131) nach der Formel (40) führt auf den Ausdruck

$$V_{AA}(t) = e^{\int_0^t [\delta + \eta^\Phi(\lambda)] \cdot d\lambda} \left[C + \int_0^t e^{-\int_0^\lambda [\delta + \eta^\Phi(\xi)] \cdot d\xi} \cdot \left(\frac{\Phi^g(\lambda)}{\Phi(\lambda)} \cdot \bar{P}_{AA} - J^H(\lambda) \right) \cdot d\lambda \right]$$

der nach einfacher Umformung übergeht in den folgenden:

$$V_{AA}(t) = \frac{\Phi(o)}{v^t \cdot \Phi(t)} \left[C + \int_0^t v^\lambda \left(\frac{\Phi^g(\lambda)}{\Phi(o)} \cdot \bar{P}_{AA} - \frac{\Phi(\lambda)}{\Phi(o)} \cdot J^H(\lambda) \right) \cdot d\lambda \right] \tag{132}$$

Aus dieser letzten Gleichung geht die Gleichung (93) sofort hervor, wenn für die Intensität der Erneuerung $\varphi(\tau) = o$ gesetzt wird. $\bar{P}_{AA}$ geht dann über in P_A, $\Phi(\lambda)$ wird zu $H(o) \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x, o) \cdot p_x(t) \cdot dx$ und ist zu ersetzen durch $B(\lambda)$, $\Phi^g(\lambda)$ wird zu $H(o) \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x, o) \cdot p_x(t) \cdot [1 - z(x+t)] \cdot dx$ und muss ersetzt werden

durch $B^{g}(\lambda)$ und schlussendlich wird die durchschnittliche Jahresleistung $J^{H}(\lambda)$ abgelöst durch die Jahresleistung $J^{B}(\lambda)$.

Aus der Gleichung (132) erhalten wir, wenn wir für $t = o$ setzen, für die Konstante $C = V_{JJ}(o)$, und damit ergibt sich die retrospektive Darstellung der Durchschnittsreserve

$$V_{JJ}(t) = \frac{\Phi(o) \cdot V_{AA}(o)}{v^{t} \cdot \Phi(t)} + \frac{1}{v^{t} \cdot \Phi(t)} \int_{o}^{t} v^{\lambda} (\Phi^{g}(\lambda) \cdot \bar{P}_{JJ} - \\ - \Phi(\lambda) \cdot J^{H}(\lambda)) \cdot d\lambda \qquad (133)$$

Die Reserve nach der Mitgliedschaft von t Jahren wird hier dargestellt durch die Reserve beim Eintritt, die Prämieneinnahmen während der t Jahre und die Kassenleistungen in der gleichen Zeit.

Wird die Mitgliedschaft des einzelnen unendlich, $t = \infty$, so ist zu erwarten, dass auch die Reserve auf Null zusammengeschrumpft sei. Es ist also $V_{JJ}(\infty) = o$, und das bewirkt, dass für die Konstante

$$C = \frac{1}{\Phi(o)} \int_{o}^{\infty} v^{\lambda} (\Phi(\lambda) \cdot J^{H}(\lambda) - \Phi^{g}(\lambda) \cdot \bar{P}_{AJ}) \cdot d\lambda$$

gesetzt werden kann. Damit erhalten wir aus (132) auch die prospektive Darstellung der Durchschnittsreserve

$$V_{JJ}(t) = \frac{1}{v^{t} \cdot \Phi(t)} \int_{t}^{\infty} v^{\lambda} (\Phi(\lambda) \cdot J^{H}(\lambda) - \Phi^{g}(\lambda) \cdot \bar{P}_{JJ}) \cdot d\lambda \qquad (134)$$

Die prospektive und retrospektive Darstellung der Reserve ergeben auch hier rechnerisch dasselbe. Um das einzusehen, braucht nur aus dem letzten Ausdruck $V_{JJ}(o)$ berechnet und in (133) eingesetzt zu werden, wodurch dann (133) selbst übergeht in den Ausdruck (134).

Die so definierte Durchschnittsreserve ist von der Erneuerung der Gesamtheit nur insoweit abhängig, als in den später eintretenden Generationen die Altersverteilung verschieden ist von derjenigen in der Anfangsgesamtheit. Um das einzusehen, setzen wir einfach einmal die Altersverteilungen einander gleich

$$\alpha(x, o) = \alpha(x, \tau) = \alpha(x)$$

Dann wird sofort

$$\Phi(t) = \Phi(o) \cdot \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(t) \cdot dx$$

was an Hand des Ausdruckes (126) leicht festgestellt werden kann. Ferner erhalten wir für

$$\Phi^g(t) = \Phi(o) \cdot \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(t) \cdot [1 - z(x+t)] \cdot dx$$

und für

$$\Phi(t) \cdot \mathring{e}^H(t) = \Phi(o) \cdot \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(t) \cdot [1 - z(x+t)] \cdot \varepsilon^g(x+t) \cdot U_{x+t} \cdot dx$$

Wir können also in der Gleichung (132) einsetzen und erhalten, da sich überall $\Phi(o)$ weghebt,

$$V^*_{11}(t) = \frac{C}{v^t \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(t) \cdot dx} + \frac{1}{v^t \cdot \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(t) \cdot dx} \cdot \int_0^t v^\lambda \int_{x_0}^{\omega} \alpha(x) \cdot p_x(\lambda) \cdot [1 - z(x+\lambda)] \cdot \{P_{11} - \varepsilon^g(x+\lambda) \cdot U_{x+\lambda}\} dx \cdot d\lambda$$

Das ist aber genau die Darstellung der Reserve in der geschlossenen Gesamtheit, denn mit $V_{\Delta\Delta}(t)$ wird auch die Durchschnittsprämie nur noch von der Altersverteilung in der Anfangsgesamtheit abhängig sein, also offenbar $\bar{P}_{\Delta\Delta}$ zu $\bar{P}_{\Delta}$ werden. Wir haben dann

$$\overset{*}{V}_{\Delta\Delta}(t) = V_{\Delta}(t)$$

Wenn die Altersverteilung der Neueintretenden stets konstant und gleich derjenigen in der Anfangsgesamtheit ist, so ist die Durchschnittsreserve in der offenen Gesamtheit gleich der Durchschnittsreserve in der geschlossenen Gesamtheit. Dieser Satz ist die logische Folge unserer anfänglichen Behauptung, dass in der offenen Gesamtheit die Generationen mit einer günstigeren Altersverteilung die andern entlasten. Wenn nämlich alle Generationen die gleiche Altersverteilung aufweisen, so sind auch alle der Kasse gegenüber gleichgestellt und eine zeitliche Verschiebung der Lasten braucht nicht vorgenommen zu werden.

Für die Grenzen, innerhalb denen sich die durchschnittliche Reserve bewegt, ergibt sich aus der Reservendifferentialgleichung nach bekannter Methode noch die Ungleichung:

$$0 \leqq V_{\Delta\Delta}(t) \leqq \frac{J^H(t) - \dfrac{\Phi^g(t)}{\Phi(t)} \cdot \bar{P}_{\Delta\Delta}}{\delta} \tag{135}$$

Unsere Untersuchungen haben gezeigt, dass die nach Zalenka definierte Durchschnittsreserve uns ermöglicht, das persönliche Verhältnis des einzelnen Versicherten gegenüber der Kasse eindeutig zu erfassen. Wir können daher auch ohne weiteres der Ansicht Zalenkas zustimmen, dass diese Durchschnittsreserve als Maßstab für die Bemessung des „Rückkaufswertes" oder „Ueberweisungsbetrages" bei Uebertritt eines Versicherten von einer Kasse in die andere verwendet werden kann, und dass damit zweifellos die beste Lösung des Problems über den Rückkaufswert in der Sozialversicherung gefunden ist.

In ähnlicher Weise, wie wir den Zusammenhang zwischen der Durchschnittsreserve in der geschlossenen Gesamtheit mit der Individualreserve dargestellt haben, liesse sich nun auch der Zusammenhang zwischen der Durchschnittsreserve in der offenen Gesamtheit und der Durchschnittsreserve in der geschlossenen Gesamtheit oder der Individualreserve darstellen. Es würde sich auch wieder zeigen, welche Rolle die Eintrittsgewinne in der offenen Gesamtheit in bezug auf die Reserve spielen.*)

Es würde sich zeigen, dass sich die retrospektive Durchschnittsreserve in der offenen Gesamtheit zusammensetzt aus dem individuellen Anteil an den aufgezinsten Anfangsreserven, vermehrt um den Durchschnitt der Reserven in den einzelnen geschlossenen Generationen und nochmals vermehrt um den Barwert der zuviel bezahlten Prämiendifferenzen $\bar{P}_{AA} - P_{A}(\tau)$, wenn $\bar{P}_{A}(\tau)$ die der Generation (τ) entsprechende Durchschnittsprämie bedeutet.

Da nun die Differenzen $P_{AA} - \bar{P}_{A}(\tau)$, und damit auch die zwischen den einzelnen Generationen sich ergebenden Eintrittsgewinne, wiederum zum Teil positiv und zum Teil negativ sind, so können und müssen wir vermuten, dass sich diese Differenzen in der unbegrenzten Zukunft gegenseitig aufheben. Andernfalls wäre die Kasse nicht im finanziellen Gleichgewicht.

Aus dieser Tatsache ergibt sich dann wiederum die logische Folgerung, dass die Durchschnittsreserve in der offenen Gesamtheit anfänglich Null sein muss:

$$V_{AA}(0) = 0 \tag{136}$$

Diese Festsetzung ist gerechtfertigt, denn unsere Durchschnittsreserve ist ja definitionsgemäss nur von der Mitgliedschaftsdauer abhängig, und es wäre nicht einzusehen, weshalb ein neu eintretendes Mitglied schon Anspruch auf eine positive oder negative Reserve haben sollte, wenn doch die Prämie als richtig gerechnet angenommen wird. Wir gelangen dann auch nicht in Widerspruch mit unserer Ungleichung (135).

---

*) Im Hinblick darauf, dass diese Untersuchung nicht unbedingt in den Rahmen dieser Arbeit gehört, verzichten wir darauf, die zum Teil sehr komplizierten Formeln hier abzuleiten.

§ 9. Die durchschnittliche Anwartschaft.

Ganz in analogem Sinne, wie wir die Durchschnittsreserve definiert haben, können wir auch einen Durchschnittswert für die Anwartschaft in der offenen Gesamtheit definieren. Wir bezeichnen die durchschnittliche Anwartschaft, welche der individuellen Anwartschaft $\bar{A}^{lk}_{x+t}$ entspricht, mit $\bar{A}^{lk}_{JJ}(t)$. Ihre Differentialgleichung ergibt sich aus derjenigen der Durchschnittsreserve, indem man dort die Prämie P_{JJ} zu Null werden lässt:

$$\frac{d\,\bar{A}^{lk}_{JJ}(t)}{dt} = (\delta + \eta^{\Phi}(t)) \cdot \bar{A}^{lk}_{JJ}(t) - J^{H}(t) \tag{137}$$

Durch Integration erhält man daraus: (138)

$$\bar{A}^{lk}_{JJ}(t) = \frac{\Phi(o) \cdot C}{v^t \cdot \Phi(t)} - \frac{1}{v^t \cdot \Phi(t)} \int_o^t v^\lambda \, \Phi(\lambda) \cdot J^H(\lambda) \cdot d\lambda$$

Indem wir nun noch die Konstante C in geeigneter Weise bestimmen, ergeben sich aus dem letzten Ausdrucke die retrospektive und prospektive Definitionsgleichung der durchschnittlichen Anwartschaft in der offenen Gesamtheit, nämlich

(139)

$$A^{lk}_{JJ}(t) = \frac{\Phi(o) \cdot A^{lk}_{JJ}(o)}{v^t \cdot \Phi(t)} - \frac{1}{v^t \cdot \Phi(t)} \int_o^t v^\lambda \cdot \Phi(\lambda) \cdot J^H(\lambda) \cdot d\lambda$$

und

(140)

$$\bar{A}^{lk}_{JJ}(t) = \frac{1}{v^t \cdot \Phi(t)} \int_t^\infty v^\lambda \cdot \Phi(\lambda) \cdot J^H(\lambda) \cdot d\lambda$$

Aus der prospektiven Darstellung erhalten wir die Anwartschaft eines Versicherten beim Eintritt in die Versicherung für $t = o$.

$$\bar{A}^{lk}_{JJ}(o) = \frac{1}{\Phi(o)} \int_o^\infty v^\lambda \cdot \Phi(\lambda) \cdot J^H(\lambda) \cdot d\lambda \tag{141}$$

Für die temporäre Anwartschaft führen wir den Ausdruck ein:

$$\bar{A}^{lk}_{\mathcal{AA};\overline{t}|} = \frac{1}{\Phi(o)} \int_o^t v^\lambda \cdot \Phi(\lambda) \cdot J^H(\lambda) \cdot d\lambda \qquad (142)$$

und für die aufgeschobene Anwartschaft

$$ {}_{t|}\bar{A}^{lk}_{\mathcal{AA}} = \frac{1}{v^t \cdot \Phi(o)} \int_t^\infty v^\lambda \cdot \Phi(\lambda) \cdot J^H(\lambda) \cdot d\lambda \qquad (143)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (142) und (143) können wir aus (139) und (140) wiederum die zwei Beziehungen herleiten, die uns schon aus der privaten Versicherung bekannt sind:

$$\bar{A}^{lk}_{\mathcal{AA}}(t) = \frac{\Phi(o)}{v^t \cdot \Phi(t)} \left(\bar{A}^{lk}_{\mathcal{AA}}(o) - \bar{A}^{lk}_{\mathcal{AA};\overline{t}|} \right) \qquad (139^*)$$

$$\bar{A}^{lk}_{\mathcal{AA}}(t) = \frac{\Phi(o)}{\Phi(t)} \cdot {}_{t|}\bar{A}^{lk}_{\mathcal{AA}} \qquad (140^*)$$

Wir sehen aus diesen wenigen Beziehungen bereits, dass die Durchschnittsbildung für die Anwartschaft nach den genau gleichen Prinzipien vorgenommen werden muss, wie sie für die Definition der Durchschnittsreserve dargelegt worden sind. Mit einer derart ermittelten Anwartschaft können wir dann in der offenen Gesamtheit nach den gleichen Regeln rechnen wie mit der individuellen Anwartschaft in der individuellen Versicherung.

Zum Schlusse sei noch die aus der Differentialgleichung (137) auf bekannte Weise sich ergebende Ungleichung der durchschnittlichen Anwartschaft angegeben:

$$o \leqq \bar{A}^{lk}_{\mathcal{AA}}(t) \leqq \frac{J^H(t)}{\delta} \qquad (144)$$

§ 10. Der durchschnittliche Gesundenrentenbarwert.

Dem individuellen Gesundenrentenbarwert $\bar{a}^{gg}_{x+t}$ entspreche in der offenen Gesamtheit der Barwert $\bar{a}^{gg}_{\Delta\Delta}(t)$. Er muss durch eine ähnliche Durchschnittsbildung entstehen, wie das durchschnittliche Deckungskapital und die Anwartschaft. Wir definieren ihn einfach durch die nachfolgende Differentialgleichung, in der $\eta^g(t)$ die durch die Gleichung

$$\eta^g(t) = -\frac{d\,\Phi^g(t)}{\Phi^g(t) \cdot dt}$$

definierte Intensität der Funktion $\Phi^g(t)$ bedeutet. Die Differentialgleichung für den Rentenbarwert hat dann die Gestalt:

$$\frac{d\,\bar{a}^{gg}_{\Delta\Delta}(t)}{dt} = (\delta + \eta^g(t)) \cdot \bar{a}^{gg}_{\Delta\Delta}(t) - 1 \qquad (145)$$

Durch Integration erhält man daraus:

(146)

$$\bar{a}^{gg}_{\Delta\Delta}(t) = \frac{\Phi^g(o)}{v^t \cdot \Phi^g(t)} \left[C - \frac{1}{\Phi^g(o)} \int_o^t v^\lambda \cdot \Phi^g(\lambda) \cdot d\lambda \right]$$

Das ergibt uns einmal die retrospektive Definitionsgleichung:

(147)

$$\bar{a}^{gg}_{\Delta\Delta}(t) = \frac{\Phi^g(o) \cdot \bar{a}^{gg}_{\Delta\Delta}(o)}{v^t \cdot \Phi^g(t)} - \frac{1}{v^t \cdot \Phi^g(t)} \int_o^t v^\lambda \cdot \Phi^g(\lambda) \cdot d\lambda$$

Dann erhalten wir aber auch die prospektive Darstellung

$$\bar{a}^{gg}_{\Delta\Delta}(t) = \frac{1}{v^t \cdot \Phi^g(t)} \int_t^\infty v^\lambda \cdot \Phi^g(\lambda) \cdot d\lambda \qquad (148)$$

wenn die Konstante C auf geeignete Weise bestimmt wird. Aus dem letzten Ausdruck erhalten wir für den durchschnittlichen Gesundenrentenbarwert bei Beginn der Versicherung

$$\bar{a}^{gg}_{\Delta\Delta}(o) = \frac{1}{\Phi^{g}_{(o)}} \int_{o}^{\infty} v^{\lambda} \cdot \Phi^{g}_{(\lambda)} \cdot d\lambda \qquad (149)$$

Definieren wir noch den Barwert für die temporäre Gesundenrente durch

$$\bar{a}^{gg}_{\Delta\Delta;\overline{t}|} = \frac{1}{\Phi^{g}_{(o)}} \int_{o}^{t} v^{\lambda} \cdot \Phi^{g}_{(\lambda)} \cdot d\lambda \qquad (150)$$

und den Barwert der aufgeschobenen Rente durch

$${}_{t|}\bar{a}^{gg}_{\Delta\Delta} = \frac{1}{v^{t} \cdot \Phi^{g}_{(o)}} \int_{t}^{\infty} v^{\lambda} \cdot \Phi^{g}_{(\lambda)} \cdot d\lambda \qquad (151)$$

so erhalten wir aus (147) und (148) noch die beiden bekannteren Darstellungen:

$$\bar{a}^{gg}_{\Delta\Delta}(t) = \frac{\Phi^{g}_{(o)}}{v^{t} \cdot \Phi^{g}_{(t)}} - \left(\bar{a}^{gg}_{\Delta\Delta}(o) - \bar{a}^{gg}_{\Delta\Delta;\overline{t}|} \right) \qquad (147^{*})$$

$$\bar{a}^{gg}_{\Delta\Delta}(t) = \frac{\Phi^{g}_{(o)}}{\Phi^{g}_{(t)}} \cdot {}_{t|}\bar{a}^{gg}_{\Delta\Delta} \qquad (148^{*})$$

Wir haben somit das Analogon zum individuellen Gesundenrentenbarwert gefunden. Wir sehen, dass der durchschnittliche Gesundenrentenbarwert, wie wir es gewünscht haben, durch die gleiche Durchschnittsbildung gewonnen wird, wie die durchschnittliche Reserve und Anwartschaft. Für die Grösse $\bar{a}^{gg}_{\Delta\Delta}(t)$ gelten auch wieder die früheren Rechnungsregeln.

Der Vollständigkeit halber sei auch noch die aus der Differentialgleichung sich ergebende Ungleichung für die Extremwerte von $\bar{a}^{gg}_{\Delta\Delta}(t)$ angeführt:

$$o \leqq \bar{a}^{gg}_{\Delta\Delta}(t) \leqq \frac{1}{\delta} \tag{152}$$

§ 11. Die durchschnittliche Prämie.

Die Bedingung für die richtige Bemessung der Durchschnittsprämie haben wir in der Gleichung (136) festgelegt: Die Anfangsreserve muss Null sein. Wir erhalten somit aus der prospektiven Reservenformel (134), wenn wir für $t = o$ setzen, für die durchschnittliche Prämie den Ausdruck:

$$\bar{P}_{\Delta\Delta} = \frac{\int_o^\infty v^\lambda \cdot \Phi(\lambda) \cdot J^H(\lambda)\, d\lambda}{\int_o^\infty v^\lambda \cdot \Phi^g(\lambda) \cdot d\lambda} \tag{153}$$

Darin können wir im Zähler ohne weiteres die durchschnittliche Anwartschaft nach (141) und im Nenner den durchschnittlichen Gesundenrentenbarwert nach (149) einführen. Wir erhalten dann, da $\Phi(o) = \Phi^g(o)$ ist:

$$\bar{P}_{\Delta\Delta} = \frac{\bar{A}^{lk}_{\Delta\Delta}(o)}{\bar{a}^{gg}_{\Delta\Delta}(o)} \tag{154}$$

Die Prämie berechnet sich also auch in der offenen Gesamtheit nach der gleichen Regel wie in der Individualversicherung und in der geschlossenen Gesamtheit, wenn Anwartschaft und Barwert entsprechend definiert sind.

Die Formeln (153) und (154) sind vollständig identisch mit der eingangs mitgeteilten Formel (88) für die Durchschnittsprämie in einer offenen Gesamtheit. Sie können auch ohne grosse Schwierigkeiten auf jene zurückgeführt werden, wenn für die Grössen

$\Phi(\lambda)$, $\Phi^g(\lambda)$ und $J^H(\lambda)$ in (153) die ursprünglichen Werte nach (126), (128) und (129) eingesetzt werden. Wir wollen jedoch auf die Durchführung der Rechnung nicht eintreten.

§ 12. Die Umlage.

Es ist auch in der offenen Gesamtheit möglich, dass von der Versicherungskasse auf die Ansammlung einer Reserve verzichtet wird. Dann haben die Versicherten auch nicht mehr die Durchschnittsprämie P_{AA} zu bezahlen, sondern einen Umlagebeitrag $\bar{P}^u_{AA}(t)$. Dieser berechnet sich aus der Reservendifferentialgleichung (131), wenn wir dort $V_{AA}(t) = o$ und auch $\frac{dV_{AA}(t)}{dt} = o$ setzen, zu

$$\bar{P}^u_{AA}(t) = \frac{\Phi(t)}{\Phi^g(t)} \cdot J^H(t) \tag{155}$$

Setzen wir wiederum in der Reservendifferentialgleichung

$$J^H(t) = \frac{\Phi^g(t)}{\Phi(t)} \cdot \bar{P}^u{}_{AA}(t)$$

und integrieren gliedweise, so erhalten wir:

(156)

$$\int_o^\infty \frac{\Phi^g(\lambda)}{\Phi(\lambda)} \left| \bar{P}^u_{AA}(t) - \bar{P}_{AA} \right| \cdot d\lambda = \int_n^\infty (\delta + \eta^{\Phi}(\lambda)) \cdot V_{AA}(\lambda) \cdot d\lambda$$

Was also im Durchschnitt beim Umlageverfahren während der ganzen Versicherungsdauer mehr zu bezahlen ist, entspricht gerade den Einnahmen durch Zins und Erbschaft beim Prämiendeckungsverfahren.

Schlusswort.

Wie wir in der Einleitung erwähnten, war das Ziel dieser Arbeit, einige Beiträge zur mathematischen Theorie der Krankenversicherung im allgemeinen zu geben. Dass es sich dabei nicht um eine lückenlose Vollständigkeit in der Darstellung handeln kann, wollen wir ohne weiteres zugeben. Im wesentlichen aber war es uns darum zu tun, einmal die Theorie der Krankenversicherung aus dem Intensitätsbegriff heraus aufzubauen und dann die Rechnungsweise für die individuelle und die soziale Krankenversicherung einander gegenüber zu stellen.

Die beiden ersten Kapitel bringen uns das *Wesen* der Krankenversicherung näher, indem wir uns von der klassischen Rechnungsmethode entfernt haben. Der Hauptvorzug unserer Art der Darstellung liegt in der mathematischen Durchsichtigkeit, die in erster Linie daher rührt, dass an Stelle der sonst üblichen Durchschnittswerte (durchschnittliche Zahl der Krankentage usw.) die Intensitäten des Erkrankens und Entkrankens eingeführt worden sind, welche die Vorgänge in der versicherten Personengesamtheit direkt beschreiben. Ein weiterer Vorteil ist ferner die Möglichkeit, die verschiedenen Formen der Krankenversicherung und ihre Kombinationen unter einheitlichen Gesichtspunkten beurteilen zu können. Dies haben wir der Einführung der durchschnittlichen Leistungen U_x pro Krankheitsfall zu verdanken. — Wir hoffen, annehmen zu dürfen, dass wir damit ein erstes Ziel erreicht haben, nämlich die Aufstellung einer mathematischen Theorie der Krankenversicherung, welche den Vergleich mit den Theorien anderer Versicherungsarten, z. B. der Lebensversicherung und Invaliditätsversicherung, ohne Schwierigkeiten gestattet.

Die Untersuchungen im letzten Kapitel haben, im Gegensatz zu den beiden ersten, mehr allgemeine Gültigkeit, wenn sie vielleicht auch in erster Linie nur von theoretischem Werte sind. Wir haben daselbst für die durchschnittliche Reserve sowohl in der geschlossenen als auch in der offenen Gesamtheit die Begriffsbildung von *Zalenka* übernommen, wonach die Durchschnittsreserve als die logische Folge der Durchschnittsprämie angesehen wird.

In unserer Darstellung haben wir allerdings eher festgesetzt, dass die Durchschnittsprämie, und somit auch die durchschnittliche Anwartschaft und der durchschnittliche Rentenbarwert als die logische Folge der Zalenka'schen Durchschnittsreserve dargestellt werden können. Durch die Einführung dieser Durchschnittswerte ist es möglich geworden, das persönliche Verhältnis des einzelnen Versicherten gegenüber der Kasse klar zu erfassen, und wir haben sogar festgestellt, dass die analogen Beziehungen gelten wie in der Individualversicherung.

Literaturnachweis.

[1] *Institute* of Actuaries, Textbook. 2. Auflage. London 1901/02.

[2] *Renfer H.*, Beiträge zur Krankenversicherung, St. Gallen 1912.

[3[*Grieshaber H.*, Beiträge zur kontinuierlichen Methode in der Krankenversicherung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 14, 1919.

[4) *Kinkelin H.*, Die gegenseitigen Hilfsgesellschaften in der Schweiz 1880.

[5] *Moser Chr.*, Denkschrift über die Höhe der finanziellen Belastung, welche den ... Krankenkassen voraussichtlich erwachsen wird. Bern 1893.

[6] *Böhmer P. E.*, Ueber die technischen Grundlagen der Krankenversicherung. Kongressberichte des IX. internationalen Aktuarenkongresses in Stockholm 1930, Band III.

[7] *Wagner H.*, Zur technischen Behandlung der privaten Krankenversicherung. Kongressberichte des IX. internationalen Aktuarenkongresses in Stockholm 1930, Band III.

[8] *Mattsson P.*, Technical Methods of Insurance against Sickness Disability. Kongressberichte des IX. internationalen Aktuarenkongresses in Stockholm 1930, Band III.

[9] Statistiska Undersökningar samt Kostnadsberäkningar M. M. Del II. Herausgegeben von der Kommission zur Revision der schwedischen Pensionsversicherung. Stockholm 1932.

Siehe auch den Bericht:

Askelöf T., Neue Ergebnisse der Kommission zur Revision der schwedischen Invaliden- und Altersversicherung, Heft 1 der „Internationalen Zeitschrift für Sozialversicherung", Januar 1933.

[10] *Schärtlin G.*, Zur mathematischen Theorie der Invaliditätsversicherung, Bern 1907.

[11] *Thalmann W.*, Die Heilungsdauer der Unfallinvaliden (Diss. Bern).

[12] *Friedli W.*, Intensitätsfunktion und Zivilstand, Beiträge zur Theorie der unabhängigen und zusammengesetzten Ordnungen. Bern 1926.

[13] *Schoenbaum E.*, Anwendung der Volterra'schen Integralgleichungen in der mathematischen Statistik. Skandinavisk Aktuarietidskrift, Jahrg. 7 und 8, 1924/25.

[14] *Zwinggi E.*, Mathematische Grundlagen der Unfallversicherung, „Blätter für Versicherungsmathematik und verwandte Gebiete", Band 31, Heft 4, Beilage zur „Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft".

[15] *Goursat*, Cours d'Analyse, 2. Auflage, 1. Band.

[16] *Kowalewski G.*, Integralgleichungen. Göschen's Lehrbücherei, Band 18, Berlin 1930.

[17] *Du Pasquier L. G.*, Mathematische Theorie der Invaliditätsversicherung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 8, 1913

[18] *Jörgensen N. R.*, Grundzüge einer Theorie der Lebensversicherung. Jena 1913.

[19] *Berger A.*, Simultane Versicherungswerte. Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen des deutschen Vereins für Versicherungswesen in der Tschechoslowakischen Republik, 6. Heft, Prag 1930.

[20] *Zwinggi E.*, Reserve und Integralgleichung in der Versicherungsmathematik „Blätter für Versicherungsmathematik und verwandte Gebiete", Band 33, Heft 1, Beilage zur „Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft".

[21] *Zwinggi E.*, Zur Darstellung der Reserve in der Einzel- und in der Sozialversicherung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 27, 1932.

[22] *Moser Chr.*, Vorlesung über Integralgleichungen für offene durch Vererbung sich erneuernde Gesamtheiten. Bern W. S. 1930/31.

[23] *Zwinggi E.*, Das Problem der Erneuerung. Erschienen in der „Festgabe Moser", Bern 1931.

[24] *Zalenka A.*, Durchschnittliche Prämienreserve in der Sozialversicherung. Aktuarské Vedy, Band III, Jahrg. 1932.

Inhalt.

Einleitung 5
Die Problemstellung 10

Kapitel I.

Die versicherungstechnischen Grundgrössen.

§ 1. Allgemeines über die Vorgänge in einer gegen Krankheit versicherten Personengesamtheit 11
§ 2. Die elementaren Masszahlen 13
§ 3. Die Entkrankungsordnung 16
§ 4. Die Berechnung der Ordnungen $l^{gg}(x+t)$ und $l^{kk}(x+t)$ aus den Intensitäten 19
§ 5. Der Krankenkoeffizient $z(x+t)$ und die beobachtete Zahl der Krankentage ${}^{(t)}K(x+t)$ 23
§ 6. Die Erkrankungsintensität und die Zahl der in einem Jahr beobachteten Krankheitsfälle $F(x+t)$ 25
§ 7. Berechnung der Intensitäten $\sigma^k(s, \tau)$, $\mu^k(s, \tau)$ und $\gamma^k(s, \tau)$ . . 26
a) Die Entkrankungsintensität $\sigma^k(s, \tau)$ 26
b) Die Intensitäten $\mu^k(s, \tau)$ und $\gamma^k(s, \tau)$ 26
§ 8. Diskussion der Formel (16) für die Ordnung der Kranken 28

Kapitel II.

Die private Krankenversicherung.

§ 1. Die Versicherungsleistungen U_x 33
§ 2. Die Gesundenrente 36
§ 3. Das Deckungskapital 43
§ 4. Die Anwartschaft 55
§ 5. Jahresprämie und Eintrittsgeld 59
§ 6. Die Umlage 61

Kapitel III.

Die soziale Krankenversicherung.

§ 1. Geschlossene und offene Bestände. Prinzipielles über die Berechnung des Durchschnittsbeitrages 64

A. Die durchschnittlichen Rechnungsgrössen in der geschlossenen Gesamtheit.

§ 2. Die Durchschnittsreserve 69
§ 3. Zusammenhang zwischen Durchschnittsreserve und Individualreserve 73
§ 4. Die durchschnittliche Anwartschaft 77

§ 5. Der durchschnittliche Gesundenrentenbarwert 79
§ 6. Die durchschnittliche Prämie 81
§ 7. Die Umlage 82

B. Die durchschnittlichen Rechnungsgrössen in der offenen Gesamtheit.

§ 8. Die Durchschnittsreserve 83
§ 9. Die durchschnittliche Anwartschaft 94
§ 10. Der durchschnittliche Gesundenrentenbarwert 96
§ 11. Die durchschnittliche Prämie 98
§ 12. Die Umlage 99
Schlusswort 100
Literaturnachweis 103

Lebenslauf.

Ich wurde am 8. März 1909 in Bern geboren. Nach wenigen Jahren zogen meine Eltern nach Worb, bei Bern, wo ich dann während vier Jahren die Primarschule und hernach während fünf Jahren die Sekundarschule besuchte. Im Frühjahr 1925 erfolgte die Aufnahme in die Tertia der Realabteilung am städtischen Gymnasium in Bern. Nach bestandener Maturität, im Herbst 1928, immatrikulierte ich mich an der hiesigen Universität, um mich versicherungsmathematischen, mathematischen und astronomischen Studien zu widmen.

Münsingen/Bern, den 28. Dezember 1933.

Osc. W. Spring.